Глава 2. СПЛОШНАЯ СРЕДА И ЕЕ КИНЕМАТИКА

§ 1. Введение

Механика – наука о движении различных материальных объектов, а механика сплошных сред (МСС) – та ее часть, которая занимается изучением движения газов, жидкостей, твердых тел, полей (электромагнитных полей, полей излучения, гравитационных полей и т.д.).

В отличие от теоретической механики МСС изучает движение объектов, в которых существенна деформация или изменение размеров, уплотнение, разрежение, сжатие, скручивание, относительный сдвиг, течение.

Теоретическая механика изучает движение либо объектов, размеры которых несущественны (а для этого вводится модель (абстракция) материальной точки), либо объектов, изменение размеров и формы которых несущественны (для этого вводится модель (абстракция) абсолютно твердого тела). Таким образом, теоретическая механика – это механика материальной точки, системы материальных точек и абсолютно твердого тела.

В МСС для исследования движения деформируемых твердых, жидких или газообразных объектов вводится модель (абстракция) деформируемой сплошной среды, или деформируемого континуума, отвлекаясь, также как и теоретическая механика, от атомарно-молекулярного строения вещества. Это можно делать в том случае, когда характерные размеры исследуемых объектов многократно больше этих атомарных или межмолекулярных размеров. А именно с такой ситуацией, как правило, специалисты имеют дело при проектировании, исследовании, расчетах рабочих процессов и прочности машин, самолетов, ракет, мостов, зданий, взрывов, при исследовании технологических процессов в реакторах, нефтяных пластах и т.д.

Представьте себе, что вы имеете гору песка и вам надо перевезти этот песок в другое место с помощью экскаваторов и грузовых машин за определенное время. Вы, конечно, не будете запрашивать размер и форму песчинок, а вы просто узнаете общую массу, объем горы, плотность песка, и в лучшем случае, его усадочные, свойства и прочность. По этим данным с помощью арифметики определите потребность в строительной технике. Аналогично поступают и в МСС.

Ведь при обычных условиях, например, в газе число молекул в единице объема $N \sim 10^{19}$ см$^{-3}$ (расстояние между молекулами $l_\mu = N^{-1/3} \sim 0{,}5\cdot10^{-6}$ см), длина свободного пробега $l \sim 10^{-5}$ см = 10^{-1} мкм, диаметр молекул $d_\mu \sim 10^{-8}$ см. Даже для чрезвычайно разряженной атмосферы на Луне $N \sim 10^{10}$ см$^{-3}$ (расстояние между молекулами $l_\mu \sim 0{,}2\cdot10^{-2}$ см).

В конденсированных средах (жидкостях и твердых телах концентрация молекул еще выше $N \sim 10^{22}$ см$^{-3}$). То есть даже очень малые по сравнению с характерными объектами МСС объемы вещества содержат огромное число молекул. Поэтому в таких условиях невозможно и нет смысла “следить” за каждой молекулой.

Следует описывать поведение таких сред с использованием осредненных параметров, которые называются *макроскопическими* (macroscopic от греческого слова macros – большой, длинный) параметрами.

§ 2. Основные гипотезы. Модель сплошной среды (континуума)

В механике сплошной среды используются следующие понятия и аксиомы.

Пространство, время и масса. Используется классическое понимание пространства, времени и массы, используемое в так называемой ньютоновской механике.

Пространство (space) – совокупность точек, каждая из которых задается тремя числами, называемыми координатами. Пространство будем считать евклидовым, т. е.

- можно ввести единую декартову систему координат $Oxyz$,
- расстояние, между любыми двумя точками A и B определяются в виде

$$r_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}\,. \qquad (2.2.1)$$

Время (time) – абсолютное, т.е. течет одинаково во всех системах координат.

Масса (mass) – абсолютная, т.е. считаем, что для всех тел можно ввести массу, которая

– неотрицательна ($m \geq 0$),

– аддитивна ($m_{A+B} = m_A + m_B$),

– одинакова (инвариантна) во всех системах координат, т.е. является скаляром.

Введенные понятия пространства, времени и массы – основа *ньютоновской механики*. Эти понятия – идеализации, которые не всегда верны. Они верны при анализе процессов в “земных” масштабах: пространственный масштаб L много больше атомных ($l_{at} \sim 10^{-10}$ м) и много меньше космогонических ($Z_{cos} \sim 10^{15}$ м), а масштабы скорости v много меньше скорости света ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с), т.е.

$$l_{at} << L << Z_{cos}, \quad v << c. \qquad (2.2.2)$$

Обобщения и уточнения понятий пространства, времени и массы рассматриваются в теории относительности.

Принцип равноправия инерциальных систем координат. Как всякое движение, движение континуума (сплошной среды) всегда рассматривается по отношению к некоторой системе координат, которая может быть и декартовой. Выбор системы координат, которая может быть подвижной или неподвижной, зависит от исследователя.

Особое значение имеет рассмотрение движения относительно инерциальных систем координат, движущихся относительно друг друга поступательно с постоянной скоростью. Наличие инерциальных систем координат, связанное с евклидовостью физического пространства и абсолютным временем, – основной постулат ньютоновской механики и физики.

Постулат Галилея. Формулировки всех физических законов не зависят от выбора инерциальной системы координат.

На практике в качестве инерциальной системы координат выбирают одну из декартовых систем координат, связанных или с Землей, или с Солнцем, или со звездами, или с самолетом, кораблем и т.д. Любая из таких систем координат может рассматриваться как инерциальная с той или иной степенью приближения.

Приближение или принцип сплошности (непрерывности). За исключением отдельных точек, линий, поверхностей, которые будут рассматриваться отдельно, все параметры материальных объектов будут задаваться непрерывными дифференцируемыми функциями 3-х пространственных и одной временной переменных, т.е. в виде $f(x, y, z, t)$ или $f(x_1, x_2, x_3, t)$. В этом случае говорят, что введена модель в виде материального континуума или сплошной (непрерывной) среды. При этом мы абстрагируемся от дискретного (атомарного) строения вещества, что можно делать, если пространственные масштабы материальных объектов во много раз больше атомарных, т.е. когда исследуемый объект содержит огромное число атомов и молекул (подробнее см. ниже).

Сплошная среда – модель вещества, в которой распределение массы, сил, импульса, энергии (и их потоков) и всех параметров (плотностей, скоростей, перемещений, температур, давлений, напряжений и т.д.), определяющих состояние и движение этого вещества, определяются *непрерывно дифференцируемыми функциями* по пространственным координатам и времени, заданными во всех точках рассматриваемого объема и во все моменты времени из рассматриваемого интервала за исключением отдельных поверхностей, линий или точек.

Приближение или гипотеза индивидуализации. Будем считать, что все материальные точки, составляющие сплошную среду (континуум), можно индивидуализировать, т.е. можно находить их положение в любой момент времени:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (\mathbf{r} \to (x_1, x_2, x_3, t))$$

$$t = 0: \quad \mathbf{r} = \mathring{\mathbf{r}} \quad (\mathring{\mathbf{r}} \to (\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \mathring{x}_3, t)) \tag{2.2.3}$$

для любой точки, задаваемой ее положением $\mathring{\mathbf{r}}$ в исходный момент времени $t = 0$.

Средние (макроскопические) величины (averaged values). Покажем на примере массовой плотности, как вводятся поля различных физических величин, удовлетворяющих принципу сплошности (п. 5).

Вокруг любой точки M, определяемой радиус-вектором $\mathbf{x}$, внутри рассматриваемого тела можно выделить объем δV с характерными размерами в трех направлениях равными δr_1, δr_2, δr_3. Объем δV будем выбирать таким образом, чтобы точка M была его центром, а характерные размеры в трех направлениях были одного порядка ($\delta r_1 \sim \delta r_2 \sim \delta r_3 \sim \delta r$)

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\delta V}\int\limits_{\delta V} \mathbf{x}'\,\mathrm{d}V, \quad (\delta V \sim (\delta r)^3). \tag{2.2.4}$$

Покажем, как вводится плотность (density) вещества в произвольной точке M.

Внутри δV заключена масса δm. Тогда средняя плотность в точке M равна

$$\tilde{\rho} = \frac{\delta m}{\delta V}. \tag{2.2.5}$$

Естественно предположить, что если объем δV содержит большое число молекул или других дискретных частиц (песчинок, капелек, пузырьков, кристаллических зерен) с характерным размером l_{micro}, и в то же время размер этого объёма δr мал по сравнению с характерным размером рассматриваемого тела

$$l_{\text{micro}} << \delta r << Z, \tag{2.2.6}$$

то $\tilde{\rho}$ можно считать практически не зависящим от размера δr в большом диапазоне его изменения и независящим от формы объема δV:

$$\tilde{\rho} = \rho + \delta\rho, \quad \delta\rho << \rho,\ \tilde{\rho}, \tag{2.2.7}$$

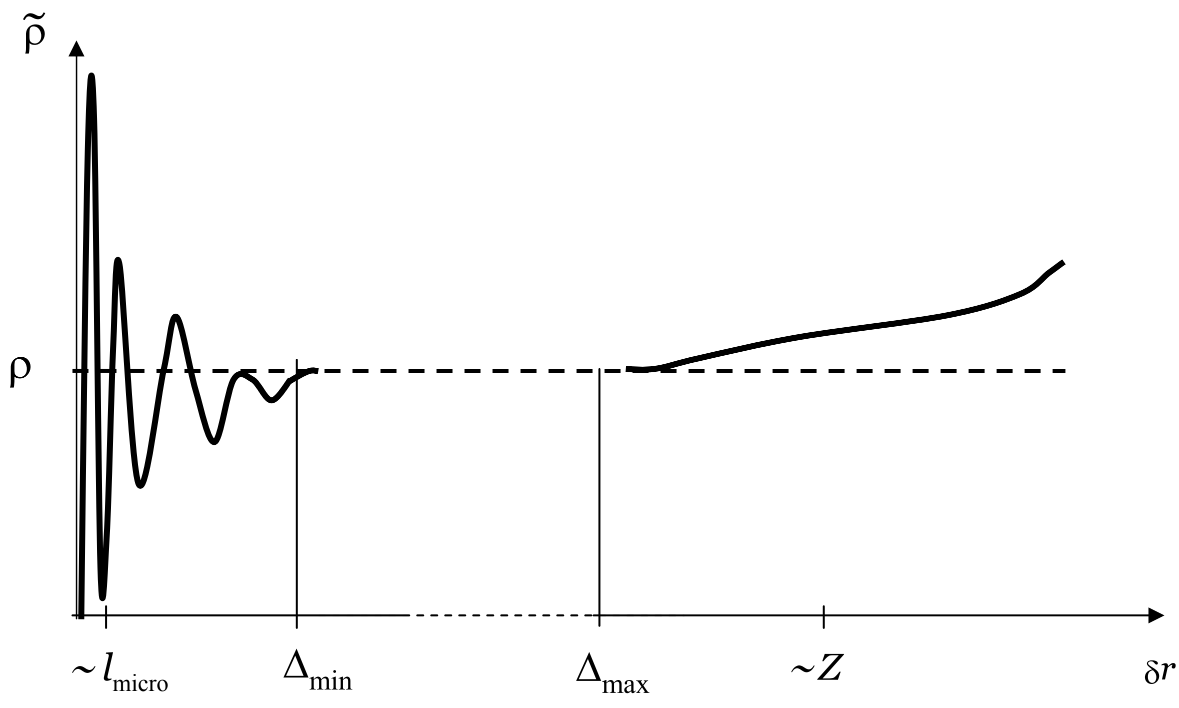

Рис. 2.1.1

где $\delta\rho$ – флуктуации $\tilde{\rho}$ с изменением δV при выполнении (2.2.6). Схематично изменение $\tilde{\rho}$ с изменением размера δr показано на рис. 2.2.1.

Определение*:* Если существует достаточно большой диапазон размеров осредненного объема

$$\Delta_{\min} << \delta r << \Delta_{\max}, \tag{2.2.8}$$

на котором среднюю величину (в данном случае $\tilde{\rho}$) можно считать независящей от этого размера δr объема δV и формы последнего, то будем говорить, что указанная средняя величина обладает свойством ***устойчивости***.

В этом случае зависимость $\tilde{\rho}$ (δr) имеет «обширное плато» в диапазоне (2.2.8), и значение $\tilde{\rho}$, соответствующее указанному «плато» можно принять за значение ρ в точке M, являющейся центром объемов $\delta V(\delta r)$

$$\rho = \tilde{\rho}, \tag{2.2.9}$$

ясно, что объемы δV, которые дают устойчивое значение средней величины (плотности) должны содержать большое число молекул или других дискретных элементов вещества:

$$\delta r > \Delta_{\min} >> l_{\mathrm{at}}. \tag{2.2.10}$$

Такие объемы называются ***макроскопичкскими*** объемами.

Для того, чтобы введенная средняя величина (плотность) характеризовала *локальную* окрестность точки M, размер объема δV должен быть мал по сравнению с характерным размером L исследуемого движения

$$\delta r < \Delta_{\max} << L. \tag{2.2.11}$$

Такие объемы называются ***элементарными макроскопическими*** объемами.

Указанным способом значение плотности можно определить в любой точке, в результате получим функцию

$$\rho = \rho(x_1, x_{2,}, x_3, t) = \rho(\mathbf{x}, t). \tag{2.2.12}$$

Выполнение требования устойчивости обеспечивает адекватность описания распределения масс в рассматриваемом физическом теле с помощью непрерывного или континуального (приближение или гипотеза сплошности) поля плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$ в пространственных масштабах, во много раз превышающих молекулярные или возможные другие масштабы дискретных структур вещества.

Определение: Поле $\rho(\mathbf{x}, t)$ будем считать представительным, если масса вещества в любом объеме V может быть вычислена через *интеграл*

$$m_V = \int_V \rho(\mathbf{x}, t)\mathrm{d}V, \tag{2.2.13}$$

а в малом объеме $\mathrm{d}V$ (т.е. когда $\sqrt[3]{\mathrm{d}V} << L$) масса равна

$$\mathrm{d}m = \rho\ \mathrm{d}V \qquad (\Delta m = \rho\ \Delta V + o(\Delta V)). \tag{2.2.13a}$$

Отсюда следует, что плотность ρ может быть определена в виде предела

$$\rho = \lim_{\substack{\Delta r \to 0 \\ (\Delta V \to 0)}} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{2.2.14}$$

При этом следует иметь в виду, что для реального вещества молекулярной структуры, несмотря на операцию $\Delta r \to 0$ должно быть $\delta r > \Delta_{\min} >> l_{\mathrm{at}}$. Т.е. ρ является промежуточной асимптотикой $\tilde{\rho}$ при $\Delta r \to 0$ в том смысле, что $\Delta r << L$, но при ограничении: $\Delta r >> l_{\mathrm{at}}$.

Подчеркнем, что представление распределения масс в реальном физическом теле с помощью введенного континуального поля плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$ является приближенным и неполным. Но указанная приближенность (отличие δm от $\rho\delta V$) и неполнота (отбрасывание флуктуаций $\delta\rho$ из-за молекулярного строения вещества) проявляется лишь в тех случаях, когда рассматриваются объемы вещества, содержащие небольшое число молекул. Поэтому континуальное поле $\rho(\mathbf{x}, t)$ есть лишь приближенная (“приглаженная” или “идеализированная”) модель реального (макроскопического) объекта.

В соответствии с гипотезой сплошности (п. 5) функция $\rho(\mathbf{x}, t)$ будет считаться непрерывной и дифференцируемой (за исключением лишь особых поверхностей, линий или точек). Более того, будем считать, что расстояния, на которых плотность ρ меняется существенно, не может быть во много раз меньше характерного размера исследуемого тела L:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \le \frac{\rho_0}{L}, \qquad (2.2.15)$$

где ρ_0 – характерное значение плотности ρ.

> ***Определение***. Функция $\rho(\mathbf{x}, t)$ непрерывная и дифференцируемая, производные которой по координате ограничены по порядку величиной ρ_0/L, называется *регулярной* на расстояниях L.

Материальная точка и поля в механике сплошной среды. Аналогично в любой точке будем вводить осредненные величины, образующие поля (fields), не только для плотности массы, но и для плотности импульса $\rho\mathbf{v}$ (а с ней и поле скорости (velocity) $\mathbf{v} = \rho\mathbf{v}/\rho$) плотности массовых или объемных сил $\rho\mathbf{F}$ (см. § 9), плотности энергии ρE, `локальных напряжений, определенных по площадкам (см. § 1 ч. 3) и т.д. Для любой точки помимо скорости $\mathbf{v}$ можно ввести и перемещения. Будем полагать, что все эти осредненные величины, образующие континуальные поля, обладают свойствами устойчивости, представительности и регулярности. Соответствующие движения материальных объектов будут рассматриваться с помощью и в рамках введенной модели сплошной среды, т.е. методами механики континуума (continuum mechanics).

Учитывая, что первые и вторые производные от рассматриваемых функций также будут рассматриваться как регулярные (за исключением, быть может, особых поверхностей, линий и точек, которые будут рассматриваться отдельно), то в соответствии с (2.2.15) будем полагать

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \le \frac{\varphi_0}{L_\varphi}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) \le \frac{\varphi_0}{L_\varphi^2}, \qquad (2.2.16)$$

где $\varphi(x_1, x_{2,}, x_3, t)$ – любая из рассматриваемых ниже функций, например ρ, $\mathbf{v}$, E,…; φ_0 – заранее известное в каждой конкретной задаче характерное значение функции φ; L_φ – заранее известное характерное расстояние (масштаб), на котором заметно меняется функция φ, так что характерным значением функции $\partial\varphi/\partial x_k$ будет φ_0/L_φ.

При выводе уравнений будут использоваться малые поверхности, объемы, отрезки и другие малые величины. В связи с этим будут применяться используемые в математическом анализе обозначения для малых величин одного порядка $O(\alpha)$ и для малых величин более высокого порядка $o(\alpha)$. Под $O(\alpha)$ понимается величина, такая что

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{O(\alpha)}{\alpha}=K,\quad \text{где } 0<K<\infty, \tag{2.2.17}$$

а под $o(\alpha)$ понимается функция, такая что

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{o(\alpha)}{\alpha}=0. \tag{2.2.18}$$

Таким образом, под *материальной точкой* в механике сплошной среды понимается частица среды (вещества) вокруг нее (точки) как центра масс, частица с характерным размером порядка δr, объемом $\delta V=O((\delta r)^3)$, массой $\rho\delta V$. Причем ее размер с одной стороны очень мал по сравнению с характерным размером исследуемого процесса или тела ($\delta r \ll L$), а с другой стороны очень велик по сравнению с атомарными или молекулярными ($\delta r \gg l_{\text{at}}$), т.е. указанная частица содержит огромное число молекул. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать материальную точку в механике сплошной среды (а точнее – ассоциируемую с ней материальную частицу с размером порядка δr) как термодинамическую систему, состояние которой определяется достаточно небольшим (во всяком случае, обозримым) набором осредненных термодинамических макроскопических параметров, таких как плотность ρ, температура T, внутренняя энергия u, энтропия s, рассмотренные ниже внутренние напряжения $\boldsymbol{\sigma}_k$ и т.д.

При этом материальные точки заполняют весь объем или пространство, т.е. находятся в каждой точке рассматриваемого пространства. Другими словами, множество материальных точек в механике сплошной среды не является дискретным или счетным. Это множество составляют континуум. Все величины в механике сплошной среды, которые упоминались или будут упоминаться, заданы во всех точках исследуемого пространства и во все моменты исследуемого периода времени, т.е. заданы в виде функций типа $\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \varphi(\mathbf{x}, t)$. При этом для этих величин выполняются условия:

1) устойчивости (независимость от δr),

2) регулярности (непрерывности и дифференцируемости и плавности в соответствии с (2.2.16) за исключением отдельных поверхностей, линий или точек, которые будут рассмотрены особо),

3) представительности (характеристики любого конечного тела определяются интегрированием соответствующих распределений или полей, т.е. функций $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ по объемам или поверхностям. В связи с этим механика сплошной среды это механика непрерывно распределенных масс, сил и энергий.

Если же ориентироваться только на дискретное атомарно-молекулярное строение вещества, то состояние даже одного кубического сантиметра вещества надо характеризовать $10^{19} – 10^{22}$ числами (по числу молекул), определяющих координаты центров молекул в каждый момент времени, плюс к этому столько же чисел, определяющих ориентации молекул, плюс столько же чисел, определяющих их скорость и т.д. Так как атомы и молекулы всегда движутся даже в покоящемся веществе, то все эти числа быстро меняются со временем, и характерное время их изменения $10^{-10} – 10^{-11}$ с. Ясно, что такой подход для описания движения газов, жидкостей и твердых тел в атмосфере, океане, в технологических устройствах, в живых телах, в конструкции машинах и т.д., т.е. в «человеческих и земных» масштабах, когда в процессы вовлечены огромное число молекул, не может быть реализован и бессмыслен из-за огромной избыточной информации, которую невозможно осознать. В то же время известно, что состояние газов и жидкостей определяется заданием всего двух макроскопических параметров – давления ρ и температуры T.

Введение небольшого числа макроскопических параметров вместо огромного числа микроскопических, это всегда нетривиальная проблема и это введение всегда связано с привлечением дополнительных гипотез или законов. Это могут быть законы теории вероятности или статистики. Это могут быть законы, полученные и обобщенные по результатам экспериментов, например, закона Гука для твердых тел, закон линейной по давлению и температуре сжимаемости для жидкостей, уравнение состояния для совершенного газа, законы теплопроводности и диффузии и т.д. Но всегда макроскопические параметры имеют смысл как статистически средние для большого числа молекул. Но в так называемых феноменологических теориях, к которым относится механика сплошной среды и термодинамика, статистический характер и микроскопическая природа макропараметров и макроуравнений явно не используются и не проявляются. И только более детальный статический анализ молекулярных процессов показывает, что характеристики молекул (их размер, форма, среднее расстояние между ними, скорость их хаотического движения, потенциалы взаимодействия) определяют значения таких макропараметров как: коэффициенты теплоемкости, модули упругости и коэффициенты сжимаемости, коэффициенты вязкости и т.д. В феноменологических теориях, в частности в механике сплошной среды и термодинамике указанные макропараметры определяются непосредственно из опытов с макроскопическими образцами исследуемого вещества.

§ 3. Лагранжево описание движения сплошной среды

Знать движение континуума – значит знать движение всех его материальных точек.

Любую материальную точку континуума можно индивидуализировать, например, тремя декартовыми координатами, которые она имела при $t = 0$:

$$\overset{\circ}{x}_1,\ \overset{\circ}{x}_2,\ \overset{\circ}{x}_3 \quad \Rightarrow \quad \overset{\circ}{\mathbf{r}} = \overset{\circ}{x}_i\,\mathbf{e}_i. \tag{2.3.1}$$

Эти координаты $\overset{\circ}{x}_1$, $\overset{\circ}{x}_2$, $\overset{\circ}{x}_3$ можно рассматривать, как “паспортные данные” (“фамилию, имя, отчество”) материальной точки, определяющие ее “индивидуальность” и неменяющиеся в процессе движения.

Вместо координат $\overset{\circ}{x}_1$, $\overset{\circ}{x}_2$, $\overset{\circ}{x}_2$ для индивидуализации материальных точек можно использовать другие координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 взаимно однозначно связанные с $\overset{\circ}{x}_1$, $\overset{\circ}{x}_2$, $\overset{\circ}{x}_2$ с помощью непрерывных и дифференцируемых функций φ_k:

$$\xi_k = \varphi_k(\overset{\circ}{x}_1,\ \overset{\circ}{x}_2,\ \overset{\circ}{x}_2) \quad (k = 1, 2. 3), \tag{2.3.2}$$

так что якобиан преобразования не равен нулю:

$$\Delta^{(\xi,\overset{\circ}{x})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \overset{\circ}{x}_1} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \overset{\circ}{x}_2} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \overset{\circ}{x}_3} \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial \overset{\circ}{x}_1} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial \overset{\circ}{x}_2} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial \overset{\circ}{x}_3} \\ \dfrac{\partial \xi_3}{\partial \overset{\circ}{x}_1} & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial \overset{\circ}{x}_2} & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial \overset{\circ}{x}_3} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2.3.3)$$

Координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 также индивидуализируют материальные точки, т.е. представляют “паспортные данные” (“фамилия, имя, отчество”) материальной точки, но выраженные не на “языке $\overset{\circ}{x}$ ”, а на другом языке – “языке ξ”. Зная “закон перевода” (2.3.2), т.е. “$\overset{\circ}{x} \to \xi$ словарь” по $\overset{\circ}{x}_1$, $\overset{\circ}{x}_2$, $\overset{\circ}{x}_3$ можно установить ξ_1, ξ_2, ξ_3 , а если разрешить (2.4.2) относительно $\overset{\circ}{x}_k$ виде “$\xi \to \overset{\circ}{x}$ словаря”:

$$\overset{\circ}{x}_k = \varphi_k^{(-1)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad k = 1, 2, 3, \qquad (2.3.4)$$

то по ξ_1, ξ_2, ξ_3 (“по паспортным данным на языке ξ”) можно восстановить “паспортные данные $\overset{\circ}{x}_1$, $\overset{\circ}{x}_2$, $\overset{\circ}{x}_3$ на языке $\overset{\circ}{x}$ ”. Обозначение $\varphi_k^{(-1)}$ означает функцию, обратную φ_k .

Определение. Переменные ξ_1, ξ_2, ξ_3 (в частности это могут быть $\overset{\circ}{x}_1$, $\overset{\circ}{x}_2$, $\overset{\circ}{x}_3$, индивидуализирующие материальные точки, и время t) называются лагранжевыми переменными (lagrangian variables).

Задание движения континуума в виде закона движения всех его материальных точек

$$x_k = f_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \qquad (k = 1, 2, 3) \qquad (2.3.5)$$

и представляет лагранжево описание движения сплошной среды.

Причем, значения $x_k = \overset{\circ}{x}_k$ при $t = 0$ позволяют определить закон (2.3.4) замены переменных $\xi_k \leftrightarrow \overset{\circ}{x}_k$

$$\overset{\circ}{x}_k = f_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \varphi_i^{(-1)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (k = 1, 2, 3). \qquad (2.3.6)$$

Если разрешить это уравнение относительно ξ_1, ξ_2, ξ_3, то получим (2.3.2):

$$\xi_k = \varphi_k(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3) \quad (k = 1, 2, 3). \qquad (2.3.7)$$

Непрерывность и однозначность (принцип сплошности). Чтобы опираться на аппарат дифференциального и интегрального исчисления будем считать, что закон движения (2.3.5) задается взаимно-однозначными, непрерывными и дифференцируемыми (достаточное число раз) функциями f_k (k = 1,2,3) от четырех переменных. *Взаимно-однозначность* отображения означает следующее. Каждой материальной точке, имеющей координаты ($\overset{\circ}{x}_1$, $\overset{\circ}{x}_2$, $\overset{\circ}{x}_3$) при t = 0, функции ставят в соответствие одну и только одну точку с координатами (x_1, x_2, x_3) в момент времени $t = \hat{t}$ и обратно каждой точке (x_1, x_2, x_3) в момент $t = \hat{t}$ соответствует одна и только одна точка ($\overset{\circ}{x}_1$, $\overset{\circ}{x}_2$, $\overset{\circ}{x}_3$) в момент t = 0.

Другими словами: две разные материальные точки не могут слиться, т.е. одновременно попасть в одну точку пространства и не могут выйти из одной точки пространства одновременно за исключением отдельных поверхностей, линий и точек. Зоны, где это условие нарушается:

- *Ударные волны* – поверхности, на которых терпят разрывы скорости, или первые производные от функций f_k;

- Зоны *разрушения, разбрызгивания, коалесценции или коагуляции, столкновения*. Имеются поверхности, на которых терпят разрывы сами функции f_k, т.к. две сколь угодно близкие при t = 0 (до разрушения) материальные точки, после разрушения могут разойтись на конечное расстояние.

- Поверхностные, линейные и точечные *источники и стоки*.

В случае дифференцируемости и взаимной однозначности отображения (2.3.5) или отображения

$$x_k = x_k(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3, t) \quad (k = 1, 2, 3). \qquad (2.3.8)$$

соответствующие якобианы преобразования не равны нулю

$$\Delta^{(x,\overset{\circ}{x})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \overset{\circ}{x}_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \overset{\circ}{x}_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \overset{\circ}{x}_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \overset{\circ}{x}_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \overset{\circ}{x}_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \overset{\circ}{x}_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial \overset{\circ}{x}_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \overset{\circ}{x}_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \overset{\circ}{x}_3} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \Delta^{(\xi,\overset{\circ}{x})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \overset{\circ}{x}_1} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \overset{\circ}{x}_2} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \overset{\circ}{x}_3} \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial \overset{\circ}{x}_1} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial \overset{\circ}{x}_2} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial \overset{\circ}{x}_3} \\ \dfrac{\partial \xi_3}{\partial \overset{\circ}{x}_1} & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial \overset{\circ}{x}_2} & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial \overset{\circ}{x}_3} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\Delta^{(x,\xi)} = \Delta^{(x,\overset{\circ}{x})} / \Delta^{(\xi,\overset{\circ}{x})} \qquad (2.3.9)$$

и уравнения (2.3.5) и (2.3.8) можно разрешись в виде однозначных дифференцируемых функций относительно $\overset{\circ}{x}_k$ или ξ_k.

$$\overset{\circ}{x}_k = \overset{\circ}{x}_k\,(x_1, x_2, x_3, t) \text{ или } \xi_k = \xi_k(x_1, x_2, x_3, t) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.3.10)$$

Эти функции позволяют находить исходное положение при $t = 0$ (координаты ($\overset{\circ}{x}_1$, $\overset{\circ}{x}_2$, $\overset{\circ}{x}_3$) материальной точки, в момент $t = \hat{t}$ находящейся в точке пространства с координатами (x_1, x_2, x_3).

Закон движения (2.3.8) можно записать в векторном виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(\overset{\circ}{\mathbf{r}}, t) \qquad (\mathbf{r} = x_k\,\mathbf{e}_k, \quad \overset{\circ}{\mathbf{r}} = \overset{\circ}{x}_k\,\mathbf{e}_k), \qquad (2.3.11)$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{r}}$ и $\mathbf{r}$ – радиусы-векторы материальной точки в моменты времени $t = 0$ и $t = \hat{t}$, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – единичные векторы базиса используемой (инерциальной) декартовой системы координат наблюдателя.

Скорость (velocity). Пусть некоторая материальная точка, индивидуализируемая координатами ($\overset{\circ}{x}_1$, $\overset{\circ}{x}_2$, $\overset{\circ}{x}_3$), определяющими вектор $\overset{\circ}{\mathbf{r}}$, в момент времени t определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}\,(\overset{\circ}{\mathbf{r}}, t)$, а в момент времени $t + \Delta t$ – радиусом-вектором $\mathbf{r}\,(\overset{\circ}{\mathbf{r}}, t + \Delta t)$. Тогда перемещение за время Δt равно $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(\overset{\circ}{\mathbf{r}}, t + \Delta t) - \mathbf{r}(\overset{\circ}{\mathbf{r}}, t)$, а скорость материальной частицы можно представить как предел отношения $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$, который определяет частную производную по времени

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(\overset{\circ}{\mathbf{r}}, t + \Delta t) - \mathbf{r}(\overset{\circ}{\mathbf{r}}, t)}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)_{\overset{\circ}{\mathbf{r}}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}(x_k \mathbf{e}_k)\right)_{\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3} = \mathbf{e}_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial t}\right)_{\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3}. \qquad (2.3.12)$$

Таким образом, скорость определяется частными производными по времени при фиксированных лагранжевых координатах $\overset{\circ}{x}_1$, $\overset{\circ}{x}_2$, $\overset{\circ}{x}_3$ и, что то же самое, при фиксированных ξ_1, ξ_2, ξ_3. Координаты вектора скорости представляются в виде

$$\upsilon_k = \left(\frac{\partial x_k}{\partial t}\right)_{\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3} = \left(\frac{\partial x_k}{\partial t}\right)_{\xi_1, \xi_2, \xi_3} \qquad (\mathbf{v} = \upsilon_k\, \mathbf{e}_k). \tag{2.3.13}$$

Ускорение (acceleration). Аналогично определяется ускорения материальной частицы

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_k \left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial t}\right)_{\xi_1, \xi_2, \xi_3} = \left.\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right|_{\overset{\circ}{\mathbf{r}}} \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{2.3.14}$$

Полное лагранжево описание движения сплошной среды в виде закона (2.3.5) или (2.3.8) для перемещений всех материальных точек часто оказывается излишне подробным и сложным. Достаточным обычно является определение зависимостей для скоростей

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\overset{\circ}{\mathbf{r}}, t) \text{ или } \upsilon_k = \upsilon_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \tag{2.3.15}$$

и ускорений

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\overset{\circ}{\mathbf{r}}, t) \text{ или } a_k = a_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (k = 1, 2, 3). \tag{2.3.16}$$

Таким образом, при лагранжевом описании все характеристики сплошной среды задаются в виде функций от лагранжевых переменных (ξ_1, ξ_2, ξ_3, t):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \; \ldots, \quad T = T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t). \tag{2.3.17}$$

Задачи

1. Движение сплошной среды в лагранжевых переменных ($\overset{\circ}{x}_1$, $\overset{\circ}{x}_2$, $\overset{\circ}{x}_3$, t) задано в виде

$$x_1 = \overset{\circ}{x}_1 + \overset{\circ}{x}_2\,(c^{\,t/\tau} - 1),\; x_2 = \overset{\circ}{x}_2 + \overset{\circ}{x}_1\,(c^{\,t/\tau} - 1),\; x_3 = \overset{\circ}{x}_3 \quad (c = \text{const}).$$

Доказать, что якобиан преобразования отличен от нуля; дать кинематический смысл заданного закона движения; найти компоненты скорости и ускорения материальных частиц.

2. Сделать то же для закона движения

$$x_1 = \overset{\circ}{x}_1 + \overset{\circ}{x}_2\,(c^2 - 1),\; x_2 = \overset{\circ}{x}_2 + \overset{\circ}{x}_1\,(c^2 - c^{-2}),\; x_3 = \overset{\circ}{x}_3 \quad (c = \text{const}).$$

3. Задано лагранжево описание движения сплошной среды

$$x_1 = \overset{\circ}{x}_1\,(1 + t/\tau),\; x_2 = \overset{\circ}{x}_2\,(1 + t/\tau)^2,\; x_3 = \overset{\circ}{x}_3\,(1 + t/\tau)^3 \quad (c = \text{const}).$$

Найти компоненты скорости и ускорения частиц в лагранжевых переменных.

§ 4. Эйлерово описание движения сплошной среды

Пусть нас интересует не история движения индивидуальных материальных точек сплошной среды, а то, что происходит в разные моменты времени в каждой геометрической точке пространства, связанной с системой отсчета наблюдателя. При этом, через фиксированные точки пространства проходят резине материальные частицы. Такое рассмотрение движения континуума и представляет эйлерово описание движения.

Аналогия с потоком автомобилей. Лагранжево описание – описание с точки зрения водителей (координаты, скорости, температура и другие характеристики каждого автомобиля). Эйлерово описание – описание с точки зрения регулировщиков (скорости и другие характеристики автомобилей в различных (фиксированных и контролируемых) точках дорог.

Таким образом, при эйлеровом описании все характеристики континуума задаются в виде функций от координат точек пространства x_1, $x_{2,}$, x_3 и времени t:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_{2,}, x_3, t), \quad T = T(x_1, x_{2,}, x_3, t). \qquad (2.4.1)$$

Координаты точек пространства x_1, $x_{2,}$, x_3 и время t называются *эйлеровыми переменными* (eulerian variables).

Переход от лагранжева описания к эйлеровому	**Переход от эйлерова описания к лагранжевому**
Дано: $x_k = f_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (k = 1, 2, 3); \quad (2.3.5)$ $T = T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)\,. \qquad (2.3.17)$ *Найти:* $\upsilon_k = \upsilon_k(x_1, x_{2,}, x_3, t) \quad (k = 1, 2, 3);$ $T = T(x_1, x_{2,}, x_3, t).$ *Решение.* Дифференцируя (2.3.5) по t (см. (2.3.13)), имеем $\upsilon_k = \upsilon_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.3.15)$ Разрешим (2.3.5), получим $\xi_k = \xi_k(x_1, x_{2,}, x_3, t) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.3.10)$ Подставляя (2.3.10) в (2.3.17) и (2.3.15),	*Дано:* $\upsilon_k = \upsilon_k(x_1, x_{2,}, x_3, t) \quad (k = 1, 2, 3); \quad (2.4.1)$ $T = T(x_1, x_{2,}, x_3, t).$ *Найти:* $x_k = f_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (k = 1, 2, 3)$ $T = T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ *Решение:* Из первого уравнения (2.4.1) имеем систему трех дифференциальных уравнений для траекторий материальных частиц $\left(\dfrac{\partial x_k}{\partial t}\right)_{\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \mathring{x}_3} = \upsilon_k(x_1, x_{2,}, x_3, t) \quad (k = 1, 2, 3).$ (2.4.2) Решение этой системы для траекторий мате-

получим эйлерово описание для T и $\mathbf{v}$:

$T = T(\xi_1(x_1, x_{2,}, x_3, t), \xi_2(x_1, x_{2,}, x_3, t), \xi_3(x_1, x_{2,}, x_3, t), t)$;

$\upsilon_k = \upsilon_k(\xi_1(x_1, x_{2,}, x_3, t), \xi_2(x_1, x_{2,}, x_3, t), \xi_3(x_1, x_{2,}, x_3, t), t) = \upsilon_k(x_1, x_{2,}, x_3, t)$

$(k = 1, 2, 3)$.

Эти функции и дают эйлерово описание движения сплошной среды:

$$T = T(x_1, x_{2,}, x_3, t);$$

$$\upsilon_k = \upsilon_k(x_1, x_{2,}, x_3, t) \quad (k = 1, 2, 3).$$

Таким образом, переход от лагранжевого описания к эйлеровому связан с дифференцированием, решением алгебраических уравнений и подстановкой этих решений в функции от лагранжевых переменных.

риальных частиц имеет вид

$$x_k = x_k(C_1, C_2, C_3, t) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (2.4.3)$$

где C_1, C_2, C_3 – константы интегрирования. При $t = 0$ координаты точек обозначаются через $\mathring{x}_1$, $\mathring{x}_2$, $\mathring{x}_3$, и они индивидуализируют каждую траекторию:

$$\mathring{x}_k = \mathring{x}_k(C_1, C_2, C_3, 0) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.4.4)$$

Разрешая эти уравнения относительно констант интегрирования C_1, C_2, C_3, получим

$$C_k = C_k(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \mathring{x}_3), \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.4.5)$$

Таким образом, C_1, C_2, C_3 индивидуализируют каждую траекторию и материальную частицу, т.е. C_1, C_2, C_3 могут рассматриваться как лагранжевые переменные.

Подставляя (2.4.5) в (2.4.3) и (2.4.1), получим лагранжево описание, где лагранжевыми переменными являются начальные координаты частиц $\mathring{x}_1$, $\mathring{x}_2$, $\mathring{x}_3$:

$$x_k = x_k[C_1(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \mathring{x}_3), C_2(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \mathring{x}_3), C_3(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \mathring{x}_3), t], \quad k = 1, 2, 3;$$

$$T = T[C_1(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \mathring{x}_3), C_2(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \mathring{x}_3), C_3(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \mathring{x}_3), t]. \quad (2.4.6)$$

Переход от эйлерова описания к лагранжевому связан с интегрированием систем трех дифференциальных уравнений первого порядка, разрешением трех алгебраических уравнений и подстановкой этих решений в уравнения эйлерова описания.

Задачи

1. В задачах 1, 2 и 3 § 3 гл. 2 осуществить переход от лагранжева описания движения сплошной среды к эйлеровому описанию.

2. Закон движения материальных частиц сплошной среды задан в виде $x_k = \mathring{x}_k \exp(\omega_k t)$ $(\omega_k = \text{const}, k = 1, 2, 3)$. Осуществить переход от лагранжева описания к эйлеровому. Най-

ти компоненты скорости в эйлеровых переменных.

3. Задано поле скоростей в эйлеровых переменных

$$v_1 = \frac{A_1 x_1}{(\tau + t)}, \quad v_2 = \frac{A_2 x_2}{(\tau + t)^2}, \quad v_3 = \frac{A_3 x_3}{(\tau + t)^3}$$

$$(A_1, A_2, A_3, \tau = \text{const}).$$

С учетом размерностей входящих в представление поля скоростей лучше записать в следующем виде:

$$v_1 = C\,\frac{x_1 / L_1}{(1 + t/\tau)}, \quad v_2 = C\,\frac{x_2 / L_2}{(1 + t/\tau)^2}, \quad v_3 = C\,\frac{x_3 / L_3}{(1 + t/\tau)^2}$$

$$(L_1, L_2, L_3, C, \tau = \text{const}),$$

где постоянные масштабные параметры L_1, L_2, L_3 определяют характерные размеры, τ - характернок время и C характерную величину скорости заданного поля скорости.

В качестве упражнения предлагается преобразовать данное поле скоростей в зависимости от лагранжевых переменных.

4. Одномерное поле скоростей в эйлеровых переменных задается законом

$$v_1 = A x_1 t, \quad v_2 = v_3 = 0 \quad (A = \text{const}).$$

Вводя масштабы по длине L, времени τ и скорости C, это одномерное поле представляется в виде:

$$v_1 = C\,\frac{x_1}{L}\,\frac{t}{\tau}, v_2 = v_3 = 0 \qquad (L, \tau, C = \text{const}),$$

Найти закон движения частиц сплошной среды и поле скоростей в лагранжевых переменных.

5. Дано плоское поле скоростей

$$v_1 = A x_2 = C\,\frac{x_2}{L}, \quad v_2 = A x_1 = C\,\frac{x_1}{L}, \quad v_3 = 0 \quad (A, L, C = \text{const}).$$

найти закон движения частиц в лагранжевых переменных.

§ 5. Скалярные, векторные и тензорные поля. Дифференцирование по пространственным координатам и времени

При изучении движения деформируемых систем методами МСС вводятся скалярные поля (температуры, плотности, концентрации, энергии и т.д.), векторные поля (скорости, перемещения, ускорения, силы и т.д.), тензорные поля (деформации, напряжения и т.д.). Их можно рассматривать в разных координатных системах. Причем эти поля заданы в виде непрерывных дифференцируемых функций по координатам точек пространства и времени (за исключением может быть отдельно рассматриваемых точек, линий и поверхностей). А при ортонорммираванных преобразованиях декартовых координат ($x'_k = \alpha_{ki} x_i$) матрица преобразования α_{ki} фиксирована для всех точек.

Оператор “набла”, градиент, дивергенция, ротор. Для анализа дифференциальных свойств полей введем дифференциальный оператор “набла”

$$\nabla = \mathbf{e}_k \nabla_k \equiv \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \qquad \left(\nabla_k \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}\right). \tag{2.5.1}$$

Применительно к скалярной функции

$$\varphi = \varphi(x_1, x_{2,}, x_3, t),$$

этот оператор соответствует градиенту

$$\nabla\varphi = \mathbf{e}_k \nabla_k \varphi \equiv \text{grad } \varphi. \tag{2.5.2}$$

Нетрудно показать, что преобразование компонент $\nabla_k\varphi$ при преобразовании координат ($x'_k = \alpha_{ki} x_i$) соответствует преобразованию компонент вектора (тензора первого ранга): α_{ki}

$$\nabla_i \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'_k} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'_i} \alpha_{ki} = \alpha_{ki} \nabla'_i \varphi .$$

Таким образом $\nabla\varphi(x_1, x_{2,}, x_3, t)$ образует векторное поле.

Применительно к векторному полю скоростей

$$\mathbf{v} = \upsilon_k(x_1, x_{2,}, x_3, t)\, \mathbf{e}_k,$$

оператор “набла” дает следующие величины:

$$\nabla_k \upsilon_i = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

которые позволяют рассматривать их как компоненты тензора 2-го ранга, называемого векторным градиентом скорости

$$\nabla'_k \upsilon'_i = \frac{\partial \upsilon'_i}{\partial x'_k} = \frac{\partial(\upsilon_j \alpha_{ij})}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x'_k} = \alpha_{ij}\, \alpha_{km} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_m} = \alpha_{ij}\, \alpha_{km} \nabla_m \upsilon_j .$$

Свертка этого тензора дает скаляр в виде дивергенции векторного поля

$$\nabla_k \upsilon_k = \text{div } \mathbf{v}. \tag{2.5.3}$$

Аналогично применение оператора “набла” к полям тензоров 2-го ранга и n-го рангов приводит к полям тензоров соответственно 3-го и $(n + 1)$-го рангов:

$$\nabla_k T_{ij} \equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}, \quad \nabla_j P_{ik\,\ldots\,m} \equiv \frac{\partial P_{ik\ldots m}}{\partial x_j}.$$

Оператор “набла” может быть применен несколько раз, что каждый раз повышает ранг получающегося тензорного поля

$$\nabla_k \nabla_m T_{ij} \equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} \;\Rightarrow\; \nabla_k \nabla_m T_{ij}\, \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j.$$

С помощью оператора “набла” можно записать операцию ротора векторного поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \equiv [\nabla \times \mathbf{v}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \upsilon_1 & \upsilon_2 & \upsilon_3 \end{vmatrix}, \tag{2.5.4}$$

что согласно (1.8.6) гл. 1 может быть представлено через ε-тензор

$$[\operatorname{rot} \mathbf{v}] \equiv [\nabla \times \mathbf{v}]_k = \varepsilon_{kij} \nabla_k \upsilon_j, \tag{2.5.5}$$

откуда следует согласно теореме о свертке § 7, что rot **v** – вектор. Покажем, что ротор от градиента скалярного поля равен нулю, учитывая, что $\varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{kji}$, $\nabla_i \nabla_j \varphi = \nabla_j \nabla_i \varphi$:

$$(\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi)_k = [\nabla \times \nabla\varphi]_k = \varepsilon_{kij} \nabla_i \nabla_j \varphi = -\varepsilon_{kji} \nabla_i \nabla_j \varphi = -\varepsilon_{kji} \nabla_j \nabla_I \varphi$$

$$= -\varepsilon_{kpq} \nabla_p \nabla_q \varphi = -\varepsilon_{kji} \nabla_i \nabla_j \varphi.$$

Таким образом

$$\varepsilon_{kij} \nabla_i \nabla_j \varphi = -\varepsilon_{kji} \nabla_i \nabla_j \varphi = 0,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \times \nabla\varphi = 0. \tag{2.5.6}$$

Субстанциональная (индивидуальная) и частная (локальная) производные по времени. В механике сплошной среды используют различные производные по времени.

Определение: Скорость изменения какого-либо параметра, например φ, для фиксированной материальной частицы (перемещающейся в пространстве) в соответствие с полем скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_{2,}, x_3, t)$ при эйлеровом описании или полем скорости $\upsilon_k = \upsilon_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ при лагранжевом описании называется субстанциональной (substantional derivative) полной или индивидуальной производной по времени и обозначается через

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \equiv \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t.$$

1. Если имеем лагранжево описание (2.3.17) для T и $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \ldots, T = T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t),$$

$$\text{то} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \equiv \left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right|_{\xi_1,\xi_2,\xi_3} = \mathbf{v}, \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \equiv \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}.$$

2. Если имеем эйлерово описание (2.4.1)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_{2,}, x_3, t), \quad T = T(x_1, x_{2,}, x_3, t),$$

то вычисление $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ и $\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$ несколько осложняется. Перейдем от эйлеровых переменных к лагранжевым (см. (2.4.6))

$$T = T[x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), t],$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}[x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), t],$$

Дифференцируя эти сложные фикции по t, имеем

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \equiv \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{\xi_1,\xi_2,\xi_3} = \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{x_1,x_2,x_3} + \left.\frac{\partial T}{\partial x_1}\right|_{t,x_2,x_3} \left.\frac{\partial x_1}{\partial t}\right|_{\xi_1,\xi_2,\xi_3} +$$

$$+ \left.\frac{\partial T}{\partial x_2}\right|_{t,x_1,x_3} \left.\frac{\partial x_2}{\partial t}\right|_{\xi_1,\xi_2,\xi_3} + \left.\frac{\partial T}{\partial x_3}\right|_{t,x_1,x_2} \left.\frac{\partial x_3}{\partial t}\right|_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}. \tag{2.5.7}$$

Учитывая, что $(\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t)_{\xi_1,\xi_2,\xi_3} \equiv \mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t$ в соответствии с (2.3.12) определяют компоненты скорости материальных частиц, имеем

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{x_1,x_2,x_3} + \sum_{i=1}^{3} \upsilon_i \frac{\partial T}{\partial x_i}. \tag{2.5.8}$$

В дальнейшем под $\partial/\partial t$ если нет специальной оговорки, подразумевается частная производная (partial derivative) по t в эйлеровым переменных. Тогда используя правила немого суммирования, получим

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \upsilon_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + \upsilon_i \nabla_i T \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T. \tag{2.5.9}$$

Аналогично для ускорения материальной частицы получим

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \upsilon_k}{\partial t} + \upsilon_i \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial \upsilon_k}{\partial t} + \upsilon_i \nabla_i \upsilon_k \equiv \frac{\partial \upsilon_k}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla \upsilon_k \tag{2.5.10}$$

или в векторной форме

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \upsilon_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \upsilon_i \nabla_i \mathbf{v} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla \mathbf{v}. \tag{2.5.11}$$

Нетрудно доказать, что если T и $\mathbf{v}$ соответственно скаляр и вектор, то $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ и $\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$ являются скаляром и вектором.

Субстанциональная производная по времени $\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right)$), характеризующая изменение T и $\mathbf{v}$ в индивидуальной материальной частице, в эйлеровых переменных равна локальной или частной производной $\left(\frac{\partial T}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)$, характеризующей изменение T и $\mathbf{v}$ в фиксированной точке пространства, плюс так называемая конвективная производная ($\upsilon_i \nabla_i T$ и $\upsilon_j \nabla_j \mathbf{v}$), характеризующая изменение и из-за перемещения материальной частицы.

Когда вклад конвективной производной равен нулю ($\mathbf{v}\,\nabla T = 0$)?

Это имеет место в трех случаях:

1) $\mathbf{v} = 0$ – нет движения;

2) $\nabla T = 0$ – однородное;

3) $\mathbf{v} \perp \nabla T$ – течение вдоль поверхности уровня поля T.

Сопутствующая система координат. При описании движения в рамках представлений сплошной среды выделяют материальные линии (волокна), изменения которых характеризует движение вещества.

> ***Определение.*** Линия, вдоль которой сохраняются постоянными значение лагранжевых координат ξ_2 и ξ_3; и меняется только лагранжева координата ξ_1, называется линией ξ_1. Аналогично вводятся линии ξ_2 и ξ_3; вдоль которых сохраняются постоянными значения двух лагранжевых координат и меняется только одна лагранжева переменная.

Линии ξ_1, ξ_2, ξ_3 образуют лагранжеву сетку в материальном объеме. При движении на этих линиях находятся одни и те же материальные частицы (поэтому эти линии можно рассматривать как “волокна”), т.к. лагранжева координата материальной частицы в процессе движения не меняется. В каждой точке в любой момент времени можно построить тройку *базисных векторов* $\mathbf{Э}_1$, $\mathbf{Э}_2$, $\mathbf{Э}_3$, направленных соответственно вдоль линий ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$\mathbf{Э}_1 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}\right)_{\xi_2,\xi_3,t}, \mathbf{Э}_2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}\right)_{\xi_1,\xi_3,t}, \mathbf{Э}_3 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_3}\right)_{\xi_1,\xi_2,t}. \qquad (2.5.12)$$

Эти вектора в общем случае не являются единичными. Если линии ξ_1, ξ_2, ξ_3 – криволинейные, то базисные векторы $\mathbf{Э}_1$, $\mathbf{Э}_2$, $\mathbf{Э}_3$ разные в разных точках.

Определение. Говорят, что линии (“волокна”) ξ_1, ξ_2, ξ_3 вместе с базисными векторами $\mathbf{Э}_1$, $\mathbf{Э}_2$, $\mathbf{Э}_3$ в каждой точке образуют *сопутствующую систему координат.* В какой-то момент времени сопутствующая система координат в частности может быть выбрана и декартовой ($t = \hat{t}$; $\xi_1 = x_1$; $\xi_2 = x_2$; $\xi_3 = x_3$) но в процессе движения “декартовость” сопутствующей системы из-за деформации этих линий может нарушиться.

В МСС характерными являются следующие координатные системы:

1. “Неподвижная” инерциальная система координат “наблюдателя”, относительно которой рассматривается движение материального тела. Часто эта система координат является декартовой (см. $Ox_1x_2x_3$ на рис. 2.5.1) с базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Причем $\mathbf{e}_i$ могут быть представлены в виде

$$t = 0: \quad \mathbf{e}_1 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1}\right)_{t,x_2,x_3}, \quad \mathbf{e}_2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_2}\right)_{t,x_1,x_3}, \quad \mathbf{e}_3 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_3}\right)_{t,x_1,x_2}. \qquad (2.5.13)$$

2. Сопутствующая координатная система (криволинейная сетка ξ_1, ξ_2, ξ_3) с базисными векторами $\mathbf{Э}_1$, $\mathbf{Э}_2$, $\mathbf{Э}_3$ в начальный момент времени $t = 0$ (см. рис. 2.5.1)

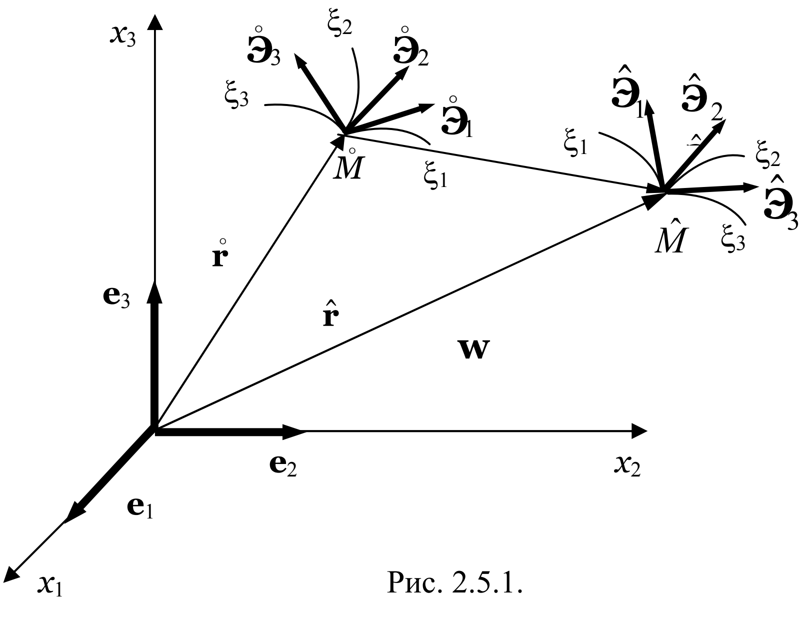

Рис. 2.5.1.

$$\overset{\circ}{\mathbf{Э}}_1 = \left(\frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}}{\partial \xi_1}\right)_{\xi_2,\,\xi_3,\,t=0}, \ \overset{\circ}{\mathbf{Э}}_2 = \left(\frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}}{\partial \xi_2}\right)_{\xi_1,\,\xi_3,\,t=0}, \ \overset{\circ}{\mathbf{Э}}_3 = \left(\frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}}{\partial \xi_3}\right)_{\xi_1,\,\xi_2,\,t=0}, \qquad (2.5.14)$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)$.

3. Сопутствующая координатная система (криволинейная сетка ξ_1, ξ_2, ξ_3) с базисами векторами $\hat{\mathbf{Э}}_1$, $\hat{\mathbf{Э}}_2$, $\hat{\mathbf{Э}}_3$ в текущий момент времени $t = \hat{t}$.

$$\hat{\mathbf{Э}}_1 = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \xi_1}\right)_{\xi_2,\,\xi_3,\,t}, \quad \hat{\mathbf{Э}}_2 = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \xi_2}\right)_{\xi_1,\,\xi_3,\,t}, \quad \tilde{\mathbf{Э}}_3 = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \xi_3}\right)_{\xi_1,\,\xi_2,\,t}, \qquad (2.5.15)$$

где $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$.

Уже отмечалось, что координаты материальных частиц в сопутствующей системе координат не меняются, т.к. эти координаты частиц являются лагранжевыми координатами. Меняются лишь конфигурация и расположение координатных линий ξ_1, ξ_2, ξ_3 и базисных векторов (базисных волокон) $\mathbf{Э}_1$, $\mathbf{Э}_2$, $\mathbf{Э}_3$. В частности материальный отрезок $\mathrm{d}\mathbf{r}$, исходящий из т. M в момент $t = 0$ занимает положение в виде вектора $\mathrm{d}\overset{\circ}{\mathbf{r}}$, исходящего из т. $\overset{\circ}{M}$, а в момент $t = \hat{t}$ занимает положение в виде вектора $\mathrm{d}\mathbf{r}$, исходящего из т. $\hat{M}$. При этом $\mathrm{d}\overset{\circ}{\mathbf{r}}$ и $\mathrm{d}\mathbf{r}$ разлагаются по базисном векторам соответственно $\overset{\circ}{\mathbf{Э}}_1$, $\overset{\circ}{\mathbf{Э}}_2$, $\overset{\circ}{\mathbf{Э}}_3$ (в момент $t = 0$) и $\hat{\mathbf{Э}}_1$, $\hat{\mathbf{Э}}_2$, $\hat{\mathbf{Э}}_3$ (в момент $t = \hat{t}$) с неменяющимися лагранжевыми координатами $\mathrm{d}\xi_1$, $\mathrm{d}\xi_2$, $\mathrm{d}\xi_3$

$$\mathrm{d}\overset{\circ}{\mathbf{r}} = \mathrm{d}\xi_i\,\overset{\circ}{\mathbf{Э}}_i, \quad \mathrm{d}\hat{\mathbf{r}} = \mathrm{d}\xi_i\,\hat{\mathbf{Э}}_i. \qquad (2.5.16)$$

Одновременно $\mathrm{d}\overset{\circ}{\mathbf{r}}$ и $\mathrm{d}\hat{\mathbf{r}}$ могут быть представлены в виде разложений по фиксированным базисным векторам декартовой системы координат наблюдателя $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathrm{d}\overset{\circ}{\mathbf{r}} = \mathrm{d}\overset{\circ}{x}_i\,\mathbf{e}_i, \quad \mathrm{d}\hat{\mathbf{r}} = \mathrm{d}\hat{x}_i\,\mathbf{e}_i, \qquad (2.5.17)$$

В разложении (2.5.15) по базисным векторам сопутствующей системы координат материальный отрезок $\mathrm{d}\mathbf{r}$ меняется только за счет движения и деформации базисных векторов $\mathbf{Э}_i$, а в разложении (2.5.16) по базисным векторам $\mathbf{e}_i$ фиксированной декартовой системы материальный отрезок $\mathrm{d}\mathbf{r}$ меняется только за счет изменения его координат $\mathrm{d}x_i$.

Задачи

1. Пусть задано векторное поле

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = 6x_1\,\mathbf{e}_1 + 4\,x_2\,\mathbf{e}_2 - x_3\,\mathbf{e}_3.$$

Чем плоха такая запись? С учетом размерностей входящих в представление поля скоростей лучше записать в следующем виде:

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = C\,(6\frac{x_1}{L}\,\mathbf{e}_1 + 4\frac{x_2}{L}\,\mathbf{e}_2 - \frac{x_3}{L}\,\mathbf{e}_3)$$

(C, L – постоянные, определяющие масштабы поля скоростей).

Найти $\operatorname{div}\mathbf{v}$, $\operatorname{rot}\mathbf{v}$.

2. Пусть $f(r)$ – скалярная функция ($r^2 = x_i\,x_i$). Показать, что

$$\nabla f(r) = f'(r)\mathbf{x}/r \qquad (\mathbf{x} = x_i\,\mathbf{e}_i), \qquad \nabla^2 f(r) = f''(r) + 2f'/r\,,$$

где штрихом обозначено дифференцирование по r.

3. Для поля скоростей в эйлеровых переменных

$$\upsilon_1 = x_1/(1+t), \quad \upsilon_2 = 2x_2/(1+t), \quad \upsilon_3 = 3x_3/(1+t),$$

Чем плоха такая запись? Более осмысленной является следующее представление данного поля скоростей через масштабы длины, времени и скорости:

$$\upsilon_1 = C\,\frac{x_1/L}{1+t/\tau} \quad \upsilon_2 = C\,\frac{2x_2/L}{1+t/\tau} \quad \upsilon_3 = C\,\frac{3x_3/L}{1+t/\tau} \qquad (L, C, \tau = \mathrm{const}),$$

Найти компоненты вектора ускорения.

4. Поле скоростей в эйлеровых переменных имеет вид

$$\upsilon_1 = \frac{\left[a\left(1-at\right)+b^2t\right]-bx_2}{1+\left(b^2-a^2\right)t^2}, \quad \upsilon_2 = \frac{bx_1-\left[a\left(1+at\right)+b^2t\right]}{1+\left(b^2-a^2\right)t^2}, \quad \upsilon_3 = \frac{cx_3}{1+ct}.$$

(a, b, c – постоянные).

Чем плоха такая запись? Лучше записать в следующем виде:

$$\upsilon_1 = C\frac{1+t/\tau-x_2/L}{1+t/\tau} \quad \upsilon_2 = C\,\frac{-1-t/\tau+x_1/L}{1+t/\tau} \quad \upsilon_3 = C\,\frac{x_3/L_3}{1+t/\tau_3}$$

$$(L, C, \tau, \tau_3 = \mathrm{const}),$$

Найти поле ускорений, закон движения индивидуальных частиц, лагранжево поле скоростей и ускорений.

5. Задано поле скоростей $\upsilon_1 = x_1 + 2x_2$, $\upsilon_2 = 4x_1 - x_2$, $\upsilon_3 = 0$. Привести его через масштабы. Найти поле ускорений в эйлеровых переменных; определить законы движения частиц в эйлеровых и лагранжевых переменных; найти поля скорости и ускорений частиц

в лагранжевых переменных.

§ 6. Установившиеся, неустановившиеся и потенциальные движения. Линии тока и траектории

В технике часто встречаются стационарные движения, которые определяются следующим образом.

> ***Определение.*** Если при эйлеровом описании движение сплошной среды и ее параметры не зависят от времени, т.е. зависят только от пространственных координат x_1, x_2, x_3, то такие движения называются установившимися (steady) или стационарными (stationary).

Движение может быть установившимся в одной системе координат, но неустановившимися в другой. Пример: обтекание самолета или корабля будет установившимся в системе координат, связанной с самолетом или кораблем, но неустановившимся в системе координат, связанной наблюдателем на Земле.

Установившиеся движения удобней исследовать в эйлеровом представлении в системе координат, где это движение является установившимся, т.к. от переменной, связанной со временем t, параметры не зависят, и максимальное число независимых переменных равно не четырем, а трем.

Линия тока. Поле скорости определяет векторные линии.

> ***Определение.*** Линиями тока или векторными линиями поля называются линии, касательные в каждой точке которых совпадают по направлению со скоростью в этой точке в данный момент времени.

Дифференциальное уравнение линии тока:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t)\mathrm{d}\lambda \quad (t = \mathrm{const}), \tag{2.6.1}$$

где λ – переменная, идентифицирующая точки вдоль линии тока, например, по длине линии тока, отсчитываемой от некоторой точки, которой соответствует $\lambda = 0$. Векторное уравнение (2.6.1) сводится к следующим трем уравнениям

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{\mathrm{d}x_1}{\upsilon_1(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{\upsilon_2(x_1,x_2,x_3,t)} = -\frac{\mathrm{d}x_3}{\upsilon_3(x_1,x_2,x_3,t)}, \tag{2.6.2}$$

где t является параметром, и каждая линия тока относится к фиксированному моменту времени t. Уравнения для линий тока можно представить также в виде

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\lambda} = v_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (i = 1, 2, 3;\ t = \mathrm{const}). \qquad (2.6.3)$$

Уравнения для траекторий частиц (см.(2.4.2)) имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = v_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad \text{или}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x_1}{v_1(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{v_2(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{\mathrm{d}x_3}{v_3(x_1,x_2,x_3,t)}. \qquad (2.6.4)$$

В уравнениях для траекторий частиц время t является независимым переменным, по которому дифференцируются и интегрируются уравнения, а в уравнениях для линий тока время t является фиксированным параметром. Линии тока дают мгновенную картину (“фотографию”) движения различных точек тела, а траектории дают историю (“кинограмму”) движения различных точек тела в течение некоторого промежутка времени.

***Теорема*:** Если движение установившееся, то линии тока и траектории совпадают.

Действительно, для установившегося движения, когда поле скоростей не зависит от времени, уравнения линий тока и траекторий соответственно имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\lambda} = v_i(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = v_i(x_1, x_2, x_3), \qquad (2.6.5)$$

где t и λ являются переменными, изменения которых определяются одинаковыми дифференциальными уравнениями

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{\mathrm{d}x_1}{v_1(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{v_2(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{\mathrm{d}x_3}{v_3(x_1,x_2,x_3,t)} = \mathrm{d}t. \qquad (2.6.6)$$

Поэтому t и λ могут отличаться только на постоянную величину, а уравнения для линий тока и траекторий совпадают, что свидетельствует и о совпадении указанных линий.

Линии тока и траектории совпадают и для неустановившихся движений, когда со временем меняются только величины скоростей, но не их направления, т.е. когда поле скоростей представляется в виде

$$\mathbf{v} = V(x_1, x_2, x_3, t)\, \boldsymbol{\nu}(x_1, x_2, x_3). \qquad (2.6.7)$$

В остальных случаях неустановившихся движений линии тока и траектории различаются.

Примеры совпадения линий тока и траекторий для неустановившихся движений, когда выполняется (2.6.7):

1. Ускоренное или замедленное вращение вокруг неподвижной оси, когда линии токе и траектории – это концентрические окружности с центрами на оси вращения.

2. Прямолинейное поступательное движение с переменной во времени скоростью, когда линии тока и траектории – параллельные прямые.

Теорема (существования и единственности линий тока). Через каждую точку области движения сплошной среды, где $\upsilon \neq 0$, $\upsilon \neq \infty$ проходит линия тока и притом только одна.

Если $\upsilon \neq 0$, то, по крайней мере, одна из компонент υ_i не равна нулю. Пусть это будет υ_1 , т.е. $\upsilon_1 \neq 0$. Тогда отыскание линий тока сводится к задаче Коши для системы двух дифференциальных уравнений, следующих из (2.6.2):

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\upsilon_2(x_1, x_2, x_3, t)}{\upsilon_1(x_1, x_2, x_3, t)}, \quad \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\upsilon_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\upsilon_1(x_1, x_2, x_3, t)} \qquad (2.6.8)$$

$$(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3 \neq \infty)$$

с граничными условиями:

$$x_1 = x_1'; \;\; x_2 = x_2'; \;\; x_3 = x_3', \qquad (2.6.9)$$

указывающими координаты точки (x_1', x_2', x_3'), в которой $\upsilon \neq 0$ и в окрестности которой отыскивается линия тока. Для задачи Коши (2.6.8), (2.6.9) имеется теорема существования и единственности в случае $\upsilon \neq 0$, $\upsilon \neq \infty$ ($i = 1, 2, 3$).

Особыми или критическими точками являются точки, в которых υ = *0 или* $\upsilon = \infty$. Примеры: критическая точка или точка торможения при обтекании тела (рис. 2.6.1а), точечный источник (рис. 2.6.1б) или точечный сток (рис. 2.6.1в).

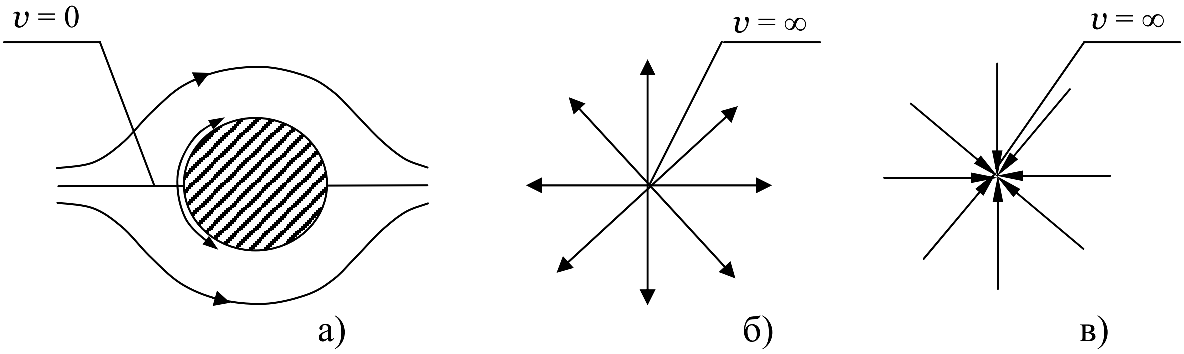

Рис. 2.6.1.

Линии тока и траектории для некоторых движений без деформаций, или движений абсолютно твердого тела.

1. В случае поступательного движения тела со скоростью $\mathbf{v}^{(0)}$ линии тока прямые линии, параллельные скорости $\mathbf{v}^{(0)}$, а траектории эквидистантные линии, определяемые траекторией одной из точек. Траектории в случае изменения направления $\mathbf{v}^{(0)}$ со временем могут иметь разнообразные формы.

2. В случае вращения тела вокруг неподвижной оси линии тока и траектории, как уже указывалось выше, совпадают и являются концентрическими окружностями с центрами на неподвижной оси.

3. При произвольном движении абсолютно твердого тела (или движении без деформаций) линии тока – винтовые линии, траектории могут иметь разнообразные формы.

Потенциальные движения. Выделяют класс потенциальных течений, для которых развиты аналитические теории.

Определение*:* Если существует функция $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ такая, что

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi = \text{grad}\,\varphi, \tag{2.6.10}$$

то движение и поле скоростей $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ называются потенциальными, а функция φ – потенциалом поля скоростей.

Потенциальное движение и соответствующие ему три функции $\mathbf{v}_i(x_1, x_2, x_3)$ (i =1, 2, 3), задающие поле скоростей, определяются только одной функцией – потенциалом.

Определение. Течение или поле скоростей $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ называется безвихревым, если во всем рассматриваемом поле и во все рассматриваемое время

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} \equiv [\nabla \times \mathbf{v}] = 0. \tag{2.6.11}$$

Теорема: Для того, чтобы поле скоростей было потенциальным необходимо и достаточно совпадение перекрестных производных:

$$\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_2}, \tag{2.6.12}$$

или, что то же самое, чтобы поле скоростей было потенциальным необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.

Это условие следует из совпадения смешенных производных второго порядка для φ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_2}.$$

См. также (2.5.6).

Примеры потенциальных движений.

1. Поступательное движение.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} = \upsilon_i^{(0)}\mathbf{e}_i, \quad \upsilon_i^{(0)} = \upsilon_i^{(0)}(t) \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\varphi = \upsilon_1^{(0)} x_1 + \upsilon_2^{(0)} x_2 + \upsilon_3^{(0)} x_3 + \text{const} \equiv \upsilon_i^{(0)}\, x_i + \text{const}. \tag{2.6.13}$$

2. Одномерное неустановившееся движение.

$$\mathbf{v} = \upsilon_1(x_1, t)\,\mathbf{e}_1 \ (\upsilon_2 = \upsilon_3 = 0), \ \ \varphi(x_1, t) = \int_{x_{10}}^{x_1} \upsilon_1(\xi, t)\mathrm{d}\xi + \text{const}. \tag{2.6.14}$$

3. Источник и сток.

$$\varphi = -\frac{Q(t)}{4\pi r} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \equiv \text{v}\sqrt{x_i x_i}\,), \quad \mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi. \tag{2.6.15}$$

Вектор $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ – перпендикулярен поверхностям уровня φ = const. Т.к. поверхности уровня для (2.6.15) (эквивалентные поверхности) сферы с центром в точке $r = 0$, то $\mathbf{v}$ – направлены вдоль или против радиусов-векторов из центра ($r = 0$).

$$\mathbf{v} = \frac{Q}{4\pi r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{2.6.16}$$

Если $Q > 0$, то имеем точечный источник, если $Q < 0$, то имеем точечный сток, причем в центре ($r = 0$) имеется особенность: $v = \infty$ (см. рис. 2.6.1б и в).

Задачи

1. Плоскопараллельное стационарное движение определяется полем скоростей $v_1 = -\alpha x_1$, $v_2 = \alpha x_2$, $v_3 = 0$ ($\alpha > 0$). Найти линии тока и траектории частиц; показать, что частицы, которые в момент находились на плоскости $x_1 = x_*$ перейдут в момент $t + \delta t$ на плоскость $x_1 = x_{**}$; могут ли частицы, находящиеся на плоскости $x_1 = 0$ достичь плоскости $x_2 = 0$ в течение конечного отрезка времени.

2. Поле скорости среды задано в виде $v_1 = (x_1 - Ct)/\tau$, $v_2 = -x_2/\tau$, $v_3 = 0$, где τ и $C =$ const. Показать, что линии тока – гиперболы; описать движение в переменных Лагранжа и начертить примерный вид нескольких траекторий.

3. Поле скоростей задано в виде

$$v_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2\tau_3}(x_2 - x_3),\ v_2 = \frac{\tau_2}{\tau_3\tau_1}(x_3 - x_1),\ v_3 = \frac{\tau_3}{\tau_1\tau_2}(x_1 - x_2) \quad (\tau_1, \tau_2, \tau_3 = \text{const}).$$

Доказать, что траектории движения частиц плоские.

4. Поле скоростей в эйлеровых переменных имеет вид $v_1 = cx_2 - bx_3$, $v_2 = ax_3 - cx_1$, $v_3 = bx_1 - ax_2$ ($a, b, c =$ const). Показать, что движение частиц среды происходит по окружности.

5. Показать, что функция $\varphi = \dfrac{-q}{4\pi r}$ $(r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2})$ является потенциалом скорости несжимаемой жидкости, имевшим особенность в начале координат ($r = 0$). Изучить это движение, найти вектор скорости и уравнение для линии тока. Вычислить объем жидкости протекавшей за единицу времени через поверхность сферы радиуса r с центром в начале координат.

6. В начале координат ($\mathbf{r} = 0$) имеется сток, а в точке $\mathbf{r} = l\,\mathbf{e}_1$ ($\mathbf{e}_1$ – единичный орт оси x_1) – источник одинаковой мощности q.

Найти потенциал такого течения φ. Найти потенциал скорости, получаемый из указанного потенциала предельным переходом $l \to 0$, $ql \to m \to$ const (диполь в начале координат с моментом m и плечом l). Показать, что потенциал φ диполя с осью x_1 и моментом m может быть получен также дифференцированием по x_1, потенциала источника мощности q. Найти для этого течения компоненты скорости v_2 и v_0 где θ – угол между осью x_1 и радиусом-вектором $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$.