Глава 4. КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

§ 1. Система уравнений массы и импульса

Запишем уравнения массы (2.9.14) и импульса (3.2.35а) в эйлеровых переменных

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_k \rho\, v_k = 0, \tag{4.1.1}$$

$$\rho \frac{\partial v_l}{\partial t} + \rho v_k \nabla_k v_l = \nabla_k \sigma_{kl} + \rho F_l, \quad l = 1, 2, 3. \tag{4.1.2}$$

Внешняя объемная сила часто задается в виде функции координат, в частности, в виде потененциального поля:

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad (F_l = -\nabla_l U), \tag{4.1.3}$$

частным случаем которого является сила тяжести. Если в исследуемом объеме движения сила тяжести меняется мало (вертикальный размер исследуемого объема h_3 много меньше радиуса Земли R):

$$h_3 << R \approx 6370 \text{ км}, \tag{4.1.4}$$

то сила тяжести определяется постоянным вектором

$$\mathbf{F} = g\mathbf{e}_3, \quad g = 9{,}81 \text{ м/с}^2, \tag{4.1.5}$$

где единичный вектор $\mathbf{e}_3$ направлен вертикально вниз.

В динамике океана и атмосферы помимо силы тяжести, которую по всему объему океана во многих исследованиях можно считать постоянной (максимальная глубина океана $h_3^{\text{ocean}} \approx$ 11 км, а высота приземного слоя атмосферы около $h_3^{\text{atm}} =$ 20 км, т.е. выполняется условие (4.1.4)), необходимо учитывать силы инерции из-за неинерциальности системы координат, связанной с вращающейся Землей. Таковыми являются центробежная сила $\mathbf{F}_{\text{Cen}}$ и кориолисова сила $\mathbf{F}_{\text{Cor}}$: [1]

$$\mathbf{F}_{\text{Cen}} = \Omega^2\, \mathbf{r} = \nabla\, (\Omega^2 r^2), \qquad \mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}], \tag{4.1.6}$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ - вектор угловой скорости вращения Земли ($\Omega = \frac{1}{24}$ час$^{-1}$ = $0{,}1157 \cdot 10^{-4}$

[1] Нижние индексы Cen и Cor связаны с английскими терминами Centrifugal force (центробежная сила) и Coriolis force (кориолисова сила).

c^{-1}), $\mathbf{r}$ – радиус вектор, исходящий из центра Земли к рассматриваемой материальной точке, $\mathbf{v}$ **–** скорость рассматриваемой материальной частицы. Центробежная сила, как и сила тяжести, является потенциальной ($U_{\mathrm{Cen}} = -\,\Omega^2 r^2$), а поле кориолисовой силы является непотенциальным.

При движении сред в электромагнитном поле рассматривается пондермоторная сила, в которую входит скорость $\mathbf{v}$. Для описания электромагнитных эффектов необходимо привлекать законы и уравнения электродинамики.

При течениях с достаточно большими скоростями и ускорениями часто внешняя объемная (массовая) сила пренебрежимо мала по сравнению с силой инерции и градиентами поверхностных сил:

$$|\mathbf{F}| << \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right| \quad \text{или} \quad \rho|\mathbf{F}| << \left|\nabla_k \boldsymbol{\sigma}_k\right|, \tag{4.1.7}$$

В этом разделе будут рассмотрены так называемые классические модели, когда объемную силу $\mathbf{F}$ можно считать заданной.

Для замыкания системы уравнений (4.1.1) необходимы уравнения состояния, или законы, определяющие тензор напряжения, который как показывают эксперименты, определяется в первую очередь тензором деформации и тензором скоростей деформации. Реологические уравнения или уравнения состояния в отличие от уравнений неразрывности и импульса учитывают характерные механические свойства рассматриваемого тела. В общем случае в реологических уравнениях проявляются температурные (тепловые), электромагнитные и другие физико-химические процессы. В связи с этим построение реологических уравнений, помимо привлечения общих принципов математики и физики и использования экспериментов, требует привлечения законов и уравнений термодинамики и электродинамики.

В данном разделе будут рассмотрены более простые классические замкнутые модели механики оплошных сред. Соответствующие им реологические соотношения или уравнение состояния получаются из простых и интуитивно «угадываемых» экспериментальных фактов и обобщения их на основе общих принципов математики и физики без привлечения уравнений термодинамики, электродинамики и фазовых превращений (например, испарения и конденсации) и химических реакций (например, горения).

Уравнение неразрывности позволяет получить другое представление для субстанциональной производной:

$$\rho\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \equiv \rho\frac{\partial f}{\partial t} + \rho v_k\nabla_k f = \frac{\partial \rho f}{\partial t} + \nabla_k(\rho v_k f). \tag{4.1.8}$$

Последнее представление называется дивергентным. Докажем это равенство, для чего используем правило дифференцирования произведения ρ и f в частной производной по времени и произведения $\rho v_k f$ в операторе ∇_k:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho f + \nabla_k(\rho v_k f) = \rho\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial \rho}{\partial t} + f\nabla_k(\rho\, v_k) =$$

$$= \rho\left(\frac{\partial f}{\partial t} + v_k\nabla_k f\right) + f\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_k(\rho v_k)\right). \tag{4.1.9}$$

Последнее слагаемое согласно уравнению неразрывности равно нулю. Поэтому равенство (4.1.8) доказано.

В связи с (4.1.4) ускорение, а точнее сила инерции материальной точки в сплошной среде может быть представлено в дивергентном виде

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_k\nabla_k\mathbf{v}\right) = \frac{\partial \rho\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla_k(\rho v_k\mathbf{v}). \tag{4.1.10}$$

Представим еще одно интересное и полезное представление ускорения материальной точки в сплошной среде

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_k\nabla_k\,\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}] + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right), \tag{4.1.11}$$

которое называется представлением в форме Лемба-Громеко. Чтобы доказать его, добавим и отнимем в выражении для конвективной составляющей ускорения $v_k\nabla_k v_l$ одно и то же слагаемое $v_k\nabla_l\, v_k$

$$v_k\nabla_k v_l = v_k\nabla_k v_l - v_k\nabla_l\, v_k + v_k\nabla_l\, v_k =$$

$$= v_k(\nabla_k v_l - \nabla_l\, v_k) + \tfrac{1}{2}\nabla_l(v_k\, v_k) = 2\omega_{lk}\, v_k + \tfrac{1}{2}\nabla_l(v^2). \tag{4.1.12}$$

Учтем, что $\omega_{lk} = -\,\varepsilon_{ilk}\omega_l = \varepsilon_{lik}\,\omega_i$ (см. (2.8.12)). Тогда

$$\upsilon_k \nabla_k(\upsilon_l \mathbf{e}_l) = 2\varepsilon_{lik}\, \mathbf{e}_l \omega_i\, \upsilon_k + \mathbf{e}_l \nabla_l\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right) = 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}] + \frac{\nabla \upsilon^2}{2}, \qquad (4.1.13)$$

что и доказывает представление Лемба-Громеко (4.1.11).

§ 2. Идеальная жидкость и газ

Для многих исследований в авиации, теории взрыва, анализа течений в соплах реактивных двигателей, лопаточных трактах компрессоров, газовых и паровых турбин очень полезной является одна из простейших схематизаций движения газов и жидкостей – модель идеальной жидкости (ideal fluid).

Определение. Идеальной жидкостью или идеальным газом называют такую сплошную среду, в которой:

1. Тензор напряжения в каждой точке является шаровым:

$$\sigma_{ij} = -\,p\;\delta_{ij}, \qquad (4.2.1)$$

т.е. определяется одним числом p (а не шестью, как в общем случае), называемым давлением;

2. Для плотности используются несколько моделей.

- Плотность принимается постоянной, и в этом случае жидкость называется несжимаемой:

$$\rho = \text{const}\,; \qquad (4.2.2а)$$

- Плотность принимается однозначной и монотонно возрастающей функцией давления p, и в этом случае жидкость (газ) называется баротропной:

$$\rho = \rho(p); \qquad (4.2.2б)$$

- В общем случае плотность зависит от давления p, температуры T (плотность убывает с ростом температуры) и концентраций различных компонент $c^{(k)}$ (k = 1, 2, … , K), которые меняются из-за физико-химических превращений:

$$\rho = \rho(p, T, c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(K)}). \qquad (4.2.2в)$$

Для изотропного тензора напряжений, имеющего вид (4.2.1) в любой ортонормированной системе координат (см. (1.8.2)) главные напряжения равны между собой $\sigma_1^* = \sigma_2^* = \sigma_3^* = -\,p$, а касательные (сдвиговые) напряжения отсутствуют:

$$\sigma_{(n\tau)} = 0, \quad \sigma_{(nn)} = -\,p. \qquad (4.2.3)$$

Знак минус в (4.2.1) и (4.2.3) взят потому что в средах, для которых годится модель идеальной жидкости, типичным является сжатое состояние (σ_1^*

$= \sigma_1^* = \sigma_1^* < 0$), чему соответствует положительное давление ($p > 0$).

Для частного случая идеальной несжимаемой жидкости ($\rho = \mathrm{const}$) система уравнений движения (4.1.1) и (4.1.2) принимает вид

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \tag{4.2.4}$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \upsilon_k\nabla_k\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\,p + \rho\,\mathbf{F}. \tag{4.2.5}$$

При заданных внешних объемных силах $\mathbf{F}$ эта система уравнений для идеальной несжимаемой жидкости содержит четыре неизвестных (υ_1, υ_2, υ_3, p) и четыре уравнения (уравнение (4.2.5) – векторное и сводится к трем уравнениям по компонентам), т.е. является замкнутой системой уравнений. Как будет видно ниже, для нахождения конкретных решений необходимо задание начальных условий (для нестационарных течений) и граничных условий.

§ 3. Потенциальное (безвихревое) течение идеальной несжимаемой жидкости

Потенциальное течение ($\mathbf{v} = \nabla\varphi$) всегда безвихревое ($\boldsymbol{\omega} \equiv \tfrac{1}{2}\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$) и обратно, безвихревое течение ($\boldsymbol{\omega} = 0$) всегда потенциальное (см. (2.6.12))

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi, \quad \boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{2}[\nabla\times\mathbf{v}] = 0. \tag{4.3.1}$$

Для потенциального течения $\mathrm{div}\,\mathbf{v}$ равняется оператору Лапласа $\nabla^2 = \nabla_i\nabla_i$ от потенциала φ

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \nabla\cdot\nabla\varphi \equiv \nabla_i\nabla_i\varphi. \tag{4.3.2}$$

Уравнение Лапласа и задача Неймана. Уравнение неразрывности в случае несжимаемой жидкости сводится к уравнению Лапласа

$$\nabla_i\nabla_i\,\varphi = 0. \tag{4.3.3}$$

Для выделения конкретного решения уравнения Лапласа необходимо учесть граничное условие. Наиболее часто используемой постановкой задачи для уравнения Лапласа в гидродинамике является задача Неймана, в которой граничное условие задается на известной поверхности S в виде известной функции $\zeta(\mathbf{x}, t)$, равной нормальной к этой поверхности производной искомого потенциала φ:

$$\mathbf{x} \in S: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \zeta(\mathbf{x}, t). \tag{4.3.4}$$

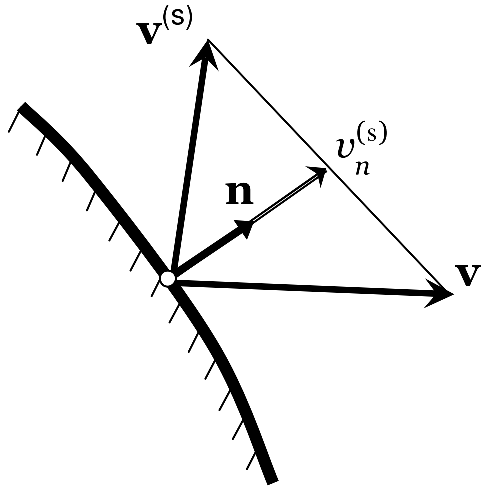

Рис. 4.3.1

Рассмотрим физический смысл этого граничного условия применительно к гидродинамике потенциального течения. Нормальная к поверхности S производная $\partial\varphi/\partial n$ равна нормальной к поверхности S скорости v_n. В связи с этим граничное условие (4.3.4) имеет физический смысл при обтекании жидкостью твердого тела с поверхностью $S^{(s)}$ (s – solid). В этом случае, так как жидкость не проникает в твердое тело, нормальная скорость поверхности тела $v_n^{(s)} = \mathbf{v}^{(s)}\,\mathbf{n}$ должна совпадать с нормальной к этой поверхности скоростью жидкости $v_n = \mathbf{v}{\cdot}\mathbf{n}$ (см. рис. 4.3.1). Тогда граничное условие (4.3.4) при обтекании твердого недеформируемого тела с поверхностью $S^{(s)}$ переписывается в виде

$$\mathbf{x} \in S^{(s)}: \quad v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n^{(s)}(\mathbf{x}, t), \tag{4.3.5}$$

и если $v_n^{(s)}(\mathbf{x}, t)$ задано, то (4.3.3) и (4.3.5) составляют задачу Неймана, решение которой в виде $\varphi(\mathbf{x}, t)$ описывает потенциальное поле скоростей при обтекании недеформируемого (абсолютно твердого) тела, движение которого (в том числе и его поверхности $S^{(s)}$) определяется двумя векторами $\mathbf{v}_0^{(s)}$ и $\boldsymbol{\omega}^{(s)}$

$$\mathbf{v}^{(s)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0^{(s)} + [\boldsymbol{\omega}^{(s)} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)] \quad . \tag{4.3.6}$$

Из представления Лемба-Громеко (4.1.7) для ускорения материальной точки для потенциального (безвихревого) течения имеем

$$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \nabla_i\left(\frac{v^2}{2}\right) \qquad (v^2 = v_k\, v_k). \tag{4.3.7}$$

Пусть внешние массовые силы также имеют потенциал:

$$F_i = \nabla_i U. \tag{4.3.8}$$

Тогда уравнение импульса можно проинтегрировать по пространственным координатам. Действительно уравнение (4.2.5) с учетом (4.3.1), (4.3.7) и (4.3.8) переписывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\nabla_i\varphi + \nabla_i\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla_i\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nabla_i U. \tag{4.3.9}$$

Операторы ∇_i и $\partial/\partial t$ можно переставлять. Тогда получим

$$\nabla_i\,\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi + \nabla_i\,\frac{v^2}{2} + \nabla_i\,\frac{p}{\rho} + \nabla_i\,U = \nabla_i\,\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U\right) = 0. \tag{4.3.10}$$

Отсюда следует, что выражение в скобках может зависеть только от времени

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = F(t). \tag{4.3.11}$$

Этот интеграл для потенциального (безвихревого) течения идеальной несжимаемой жидкости в потенциальном поле внешних сил называется интегралом Коши-Лагранжа. Он позволяет вычислить поле давления $p(\mathbf{x}, t)$, если известен потенциал поля скоростей $\varphi(\mathbf{x}, t)$.

§ 5. Линейно вязкие и линейно упругие среды

Существуют процессы с веществами обычно в жидком или газовом состояниях, когда помимо обратимого или близко к обратимому так называемого гидростатического сопротивления объемному сжатию проявляется сопротивление деформированию (в основном сдвиговому) из-за вязкости. И это сопротивление тем больше, чем больше скорость деформации.

Определение. Вязкими средами или телами называют такие, в которых тензор напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ зависит от плотности ρ и тензора скорости деформаций $\mathbb{E}$. Реологическое уравнение для них имеет вид:

$$\sigma_{ij} = -p^{(st)}\,\delta_{ij} + \sigma_{ij}^{(v)},$$

$$p^{(st)} = p(\rho),$$

$$\mathbf{S}^{(v)} = \mathbf{S}^{(v)}(\mathrm{E})$$

или $\sigma_{ij}^{(v)} = \sigma_{ij}^{(v)}\,(e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}, e_{33}) \quad (i, j = 1, 2, 3).$ (4.5.1)

Здесь $p^{(st)}$ – статическая или гидростатическая часть тензора напряжения или гидростатическое давление, зависящее как и для идеальных баротропных сред от плотности ρ (в более общих случаях, рассмотренных в гл. 6, давление $p^{(st)}$ может зависеть от температуры, концентрации компонент среды и других скалярных параметров); $\sigma_{ij}^{(v)}$ – компоненты тензора вязких напряжений [2].

Определение. Линейно-вязкой средой называется среда, у которой гидростатическая часть тензора напряжений (давление) зависит от плотности, а остальная (тензор вязких напряжений) – линейно зависит от тензора скорости деформаций. Реологическое уравнение таких сред имеет вид

$$\sigma_{ij} = -p^{(st)}\,\delta_{ij} + \sigma_{ij}^{(v)}, \quad p^{(st)} = p^{(st)}(\rho), \quad \sigma_{ij}^{(v)} = M_{ijkl}^{(v)}\,e_{kl}. \qquad (4.5.2)$$

Здесь $M_{ijkl}^{(v)}$ в силу теоремы деления (§8 гл. 1) – тензор четвертого ранга коэффициентов вязкости, который полагается постоянным и является характеристикой вещества. Среды, удовлетворяющие линейному закону (4.5.2) для вязких напряжений называются еще и ньютоновскими жидкостями.

Модели линейно-вязкой среды или ньютоновской жидкости соответствуют жидкости и газы, а при очень больших давлениях (более 10^{10}– 10^{11} Па) и твердые тела, хотя для последних характерна нелинейная вязкость.

Для деформирования твердых тел, обладающих в отличие от жидкостей или газов прочностью, характерно сопротивление любому статическому деформированию – не только объемному, но и статическому сдвигу. Под статическим деформированным состоянием понимается состояние, при котором тензор скоростей деформаций равняется нулю или достаточно мал. В связи с этим говорят, что тело или среда обладает прочностью, если тензор напряжения зависит тензора деформаций при растяжениях и сдвигах.

Определение. Среда называется упругой, если эйлеров тензор напряжения определяются эйлеровым тензора деформаций, т е. их реологическое уравнение имеет вид:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E}) \text{ или } \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{223}, \varepsilon_{33}) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.5.3)$$

Здесь знак $\wedge$ над $\mathbf{S}$ и ε_{kl}, отмечающий эйлеров (Альманси) тензор деформаций опущен.

В общем случае в эту зависимость могут входить температура и другие скалярные параметры физико-химической природы (например, концентрации разных компонент).

Пусть деформации отсчитываются от состояния, в котором отсутствуют напряжения:

$$\varepsilon_{kl} = 0, \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (k, l, i, j = 1, 2, 3)$$

Тогда, разлагая зависимость (4.5 2) в ряд Тейлора, и оставляя только линейные члены, получим более простую модель упругого тела, а именно – модель линейно упругого тела.

Определение. Линейно-упругой средой или телом, называется такая среда, у которой тензор напряжения линейно зависит от тензора деформации. Реологическое уравнение таких сред имеет вид:

$$\sigma_{ij} = M^{(\mathrm{el})}_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}. \quad (4.5.4)$$

Здесь $M^{(\mathrm{el})}_{ijkl}$ в силу теоремы деления (§8 гл. 1) – тензор четвертого ранга коэффициентов (модулей) упругости[3], который полагается постоянным и является характеристикой вещества.

Соотношение (4.5.4) называется законом Гука и описывает поведение твердых тел при достаточно малых деформациях.

Используется более общее определение упругости, называемое гипоупругостью (hypoelasticity), при котором реологическое уравнение является дифференциальным и задает скорость изменения тензора напряжения в виде

---

[2] Верхние индексы (st) и (v) соответствуют словам: static – статический и viscous – вязкий.

яумановской производной (см. (3.4.18) гл. 3) как линейную функцию от тензора скорости деформации

$$\frac{\mathrm{d}_{(v\omega)}\sigma_{ij}}{\mathrm{d}t} = M_{ijkl}^{(\mathrm{hel})}\, e_{kl}. \qquad (4.5.5)$$

При этом полагается[4], что тензор модулей упругости $M_{ijkl}^{(\mathrm{hel})}$ может зависеть от тензора напряжений, температуры и других физико-химических параметров. Среды, характеризуемые соотношением (4.5.5) называются гипоупругими.

Из (4.5.5) и выражения для яумановской производной (3.4.18) можно получить выражение для изменения эйлерова тензора напряжений в материальной точке, отнесенное к фиксированным осям

$$\mathrm{d}_{(v)}\sigma_{ij} = M_{ijkl}^{(\mathrm{hel})}\, e_{kl}\, \mathrm{d}t - \omega_{pi}\, \mathrm{d}t\, \sigma_{pj} - \omega_{pj}\, \mathrm{d}t\, \sigma_{ip}. \qquad (4.5.6)$$

Поле смещений $\mathrm{d}w_i$ за время $\mathrm{d}t$ и определяемые им деформации $e_{kl}\,\mathrm{d}t$ и повороты $\omega_{pi}\,\mathrm{d}t$ вычисляются из соотношения

$$v_i\, \mathrm{d}t = \mathrm{d}w_i,$$

$$e_{kl}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}(\mathrm{d}w_k) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathrm{d}w_l)\right) = \mathrm{d}\varepsilon_{kl}, \qquad (4.5.7)$$

$$\omega_{pi}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{d}w_p) - \frac{\partial}{\partial x_p}(\mathrm{d}w_i)\right) = -\varepsilon_{lpi}\,\omega_l\, \mathrm{d}t = -\varepsilon_{lpi}\, \mathrm{d}\gamma_l$$

$$(\mathrm{d}\gamma_i = \omega_i\, \mathrm{d}t, \quad \omega_{pi} = -\varepsilon_{lpi}\,\omega_l),$$

где $\mathrm{d}\gamma_i$ – угол поворота частицы за время $\mathrm{d}t$ с угловой скоростью ω_i (см. (2.8.12)) вокруг оси, определяемой базисным координатным вектором $\mathbf{e}_i$. Из (4.5.6) имеем

$$\mathrm{d}_{(v)}\sigma_{ij} = M_{ijkl}^{(\mathrm{hel})}\, \mathrm{d}\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{lpi}\,\sigma_{pj}\, \mathrm{d}\gamma_l + \varepsilon_{lpj}\,\sigma_{ip}\, \mathrm{d}\gamma_l. \qquad (4.5.8)$$

Таким образом, изменение напряжений зависит от малых вращений $\mathrm{d}\gamma_l$ и деформаций $\mathrm{d}\varepsilon_{kl}$, но не зависит от скорости вращения и скорости деформаций. В связи с этим после интегрирования уравнения (4.5.8) компоненты эй-

---

[3] Верхний индекс (el) соответствует слову elastic – упругий

[4] Верхний индекс (hel) соответствует слову hypoelastic: h –hypo (гипо), el -elastic (упругий)

лерова тензора напряжения будут определяться общей деформацией и поворотами, но не скоростью деформаций, как для вязких сред. Таким образом, гипоупругие среды являются невязкими.

Еще одна особенность гипоупругой среды состоит в том, что малые деформации частицы этой среды обратимы. Действительно, если материальная частица, находящаяся в напряженном состоянии σ_{ij}, подвергнется малому вращению на углы $\mathrm{d}\gamma_l$ и деформации $\mathrm{d}\varepsilon_{kl}$, то напряжение в этой частице в соответствии с (4.5.8) изменяется на $\mathrm{d}_{(v)}\sigma_{ij}$. Далее, если за счет обратного поворота на углы $-\mathrm{d}\gamma_l$ и обратных деформаций $-\mathrm{d}\varepsilon_{kl}$ рассматриваемая частица восстановит свою положение и форму, то с точностью величин второго порядка от $\mathrm{d}\sigma_{pj}$, $\mathrm{d}\gamma_l$, $\mathrm{d}\sigma_{ij}$, $\mathrm{d}\varepsilon_{kl}$ напряжения σ_{ij} также восстановятся.

Эта обратимость и "невязкость" оправдывают использование термина "упругий".

Анизотропные и изотропные вязкие и упругие среды. Коэффициенты вязкости $M_{ijkl}^{(\mathrm{v})}$ и модули упругости $M_{ijkl}^{(\mathrm{el})}$ или $M_{ijkl}^{(\mathrm{hel})}$ образуют тензоры четвертого ранга в силу инвариантности (4.5.2), (4.5.4) и (4.5.5) относительно выбора системы координат и теоремы деления (см. § 8 гл. 1). Все эти три тензора, если не оговорено, будем обозначать одной буквой M_{ijkl} без верхнего индекса.

Тензор четвертого ранга определяется $3^4 = 81$ компонентами, но из-за симметрии тензора напряжений σ_{ij}, тензора скоростей деформации e_{kl} и тензора деформации ε_{kl} обсуждаемые тензоры четвертого ранга также симметричны

$$M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{ijlk} = M_{jilk}. \tag{4.5.9}$$

Поэтому у этих тензоров коэффициентов вязкости и коэффициентов упругости из 81 компонент независимыми являются $6 \times 6 = 36$ компонент.

В природе и технике широко распространены так называемые изотропные среды, про которые говорят, что их свойства во всех исправлениях одинаковы. Это житейская формулировка. Математически строгой формулировкой является следующая.

> ***Определение***. Сплошная среда называется изотропной, если тензоры, характеризующие ее физические свойства (а таковыми являются тензоры четвертою ранга коэффициентов вязкости $M^{(\mathrm{v})}_{ijkl}$ и модулей упругости $M^{(\mathrm{el})}_{ijkl}$ или $M^{(\mathrm{hel})}_{ijkl}$), являются изотропными.

В соответствие с определением изотропного тензора (см. (1.9.22)) его компоненты инвариантны (неизменны или одинаковы) во всех ортонормированных (декартовых) системах координат, получающихся друг из друга вращением и зеркальным отражением троек векторов единичного базиса.

Применительно к соотношениям, определяющим компоненты тензора напряжения σ_{ij} через компоненты тензора деформации ε_{kl} (см. (4.5.3), (4.5.4)) или через компоненты тензора скорости деформации e_{kl} (см. (4.5.1), (4.5.5)), свойство изотропии сплошной среды означает следующее. Пусть в некоторой точке упругой сплошной среды выделены две декартовые системы координат x_1, x_2, x_3 (с базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) и x'_1, x'_2, x'_3 (с базисом $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$), повернутые относительно друг друга, что определяется матрицей направляющих конусов α_{ij} (см. (1.2.1)). Рассмотрим два *разных* деформированных состояния, которым соответствуют два *разных* тензора деформации и два разных тензора напряжения

$$\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(1)}_{ij}\,\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j; \quad \varepsilon^{(2)} = \varepsilon^{(2)\prime}_{ij}\,\mathbf{e}'_i\,\mathbf{e}'_j;$$

$$\sigma^{(1)} = \sigma^{(1)}_{ij}\,\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j; \quad \sigma^{(2)} = \sigma^{(2)\prime}_{ij}\,\mathbf{e}'_i\,\mathbf{e}'_j, \tag{4.5.10}$$

но с *совпадающими компонентами* тензоров деформации в этих двух выделенных и разных базисах

$$\varepsilon^{(1)}_{ij} = \varepsilon^{(2)\prime}_{ij} = \varepsilon_{ij}. \tag{4.5.11}$$

Это не значит, что $\mathbb{S}^{(1)}$ равен $\mathbb{S}^{(2)}$, так как эти два тензора имеют одинаковые компоненты в разных базисах. Записывая закон Гука в системе x_1, x_2, x_3, нужно пользоваться коэффициентами $M^{(\mathrm{el})}_{ijkl}$, а в системе x'_1, x'_2, x'_3 – коэффициентами $M^{(\mathrm{el})\prime}_{ijkl}$. Причем в соответствии с правилом преобразования компонент тензора имеет место

$$M_{ijkl}^{(\mathrm{el})\prime} = M_{mnqp}^{(\mathrm{el})}\, \alpha_{im}\, \alpha_{jn}\, \alpha_{kq}\, \alpha_{lp}. \tag{4.5.12}$$

Напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}$ и $\sigma_{ij}^{(2)\prime}$ рассчитываются по формулам

$$\sigma_{ij}^{(1)} = M_{ijkl}^{(\mathrm{el})}\, \varepsilon_{kl}^{(1)} = M_{ijkl}^{(\mathrm{el})}\, \varepsilon_{kl}, \quad \sigma_{ij}^{(2)\prime} = M_{ijkl}^{(\mathrm{el})\prime}\, \varepsilon_{kl}^{(2)\prime} = M_{ijkl}^{(\mathrm{el})\prime}\, \varepsilon_{kl}, \tag{4.5.13}$$

и в общем случае, несмотря на то, что $\varepsilon_{kl}^{(1)} = \varepsilon_{kl}^{(2)}$, значения компонент тензоров напряжения $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$ с одинаковыми номерами разные:

$$\sigma_{ij}^{(1)} \neq \sigma_{ij}^{(2)\prime}.$$

В изотропной среде, в которой тензор модулей упругости изотропный, и его компоненты с одинаковыми номерами во всех ортонормированных системах координат одни и те же (инвариантны)

$$M_{ijkl}^{(\mathrm{el})\prime} = M_{ijkl}^{(\mathrm{el})}, \tag{4.5.14}$$

при совпадении компонент с одинаковыми номерами тензоров деформации совпадают с одинаковыми номерами и компоненты тензоров напряжения

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)\prime}. \tag{4.5.15}$$

Таким образом, в изотропной упругой среде соотношения между компонентами тензора напряжения и компонентами тензора деформации в одной системе координат не зависят от ориентации этой системы координат относительно среды. В этом смысле и следует понимать одинаковость свойств изотропных сред во всех направлениях или во всех системах координат.

В неизотропных средах, которые называются анизотропными, существуют как минимум две системы декартовых координат, в которых матрицы коэффициентов тензора, определяющего физические свойства среды (в линейно-упругой среде – это $M_{ijkl}^{(\mathrm{el})}$, в линейно-вязкой среде – это $M_{ijkl}^{(\mathrm{v})}$), не совпадают между собой, т.е. в (4.5.14) $M_{ijkl}^{(\mathrm{el})\prime} \neq M_{ijkl}^{(\mathrm{el})}$ и, несмотря на (4.5.11) из (4.5.13) имеем $\sigma_{ij}^{(1)} \neq \sigma_{ij}^{(2)\prime}$. Таким образом, в анизотропных упругих (вязких) средах соотношения между компонентами тензора напряжений и компонентами тензора деформаций (скорости деформаций) зависят от ориентации системы координат, в которой рассматриваются эти компоненты.

Изотропными средами являются газы, жидкости (за исключением аномальных жидкостей, содержащих ориентированные длинные волокна или очень длинные молекулы), поликристаллические мелкозернистые материалы с хаотической ориентацией кристаллов (таковыми являются большинство конструкционных металлов).

Анизотропными средами являются монокристаллы. Существуют анизотропные среды, обладающие частичной изотропией. Например, когда компоненты тензоров, отражающие физические свойства среды, не меняются при вращении системы координат вокруг выделенной оси (направления) или, другими словами, во всех системах координат с фиксированной осью, но меняются при всех других ортогональных преобразованиях. Таковыми являются волокнистые материалы, т.е. материалы, формированные волокнами в выделенном направлении. В природе и технике встречаются и другие материалы с частичной изотропией или симметрией. Актуальность их исследования сейчас связана с широким использованием композиционных материалов.

Рассмотрим теперь тензоры четвертого ранга коэффициентов вязкости и модулей упругости для изотропной среди, обозначая их одной буквой M_{ijkl}.
В соответствии с изотропностью

$$M'_{ijkl} = M_{ijkl}. \tag{4.5.16}$$

Изотропный тензор четвертого ранга можно образовать как полиадное произведение.

Полиадное произведение двух изотропных тензоров второго ранга дают изотропный тензор четвертого ранга. Так как изотропный тензор второго ранга с точностью до скалярного сомножителя это δ-тензор, то рассмотрим возможные варианты полиадных произведений δ-тензоров. Они имеют вид

$$\delta_{ij}\,\delta_{kl}, \quad \delta_{ik}\,\delta_{jl}, \quad \delta_{il}\,\delta_{jk}. \tag{4.5.17}$$

Подчеркнем, что в силу изотропии **δ**-тензора компоненты δ_{mn} инвариантны при ортогональных преобразованиях декартовых координат, а потому представленные в (4.5.17) три "δ - образных" тензора четвертого ранга изотропны.

Теорема. Из 36 независимых в общем случае компонент этого симметричного по первым двум и вторым двум индексам (см. (4.5.9) тензора M_{ijkl}, в случае его изотропности (4.5.10) такими независимыми компонентами остаются только две.

Докажем эту теорему и покажем, что любой изотропный тензор четвертого ранга, симметричный по первым двум и вторым двум индексам (см (4.5.9)) можно представить как линейную комбинацию трех "δ - образных" тензоров (4.5.17), образованных из полиадных произведений δ-тензоров.

Лемма 1: Если номер компоненты $ijkl$ изотропного тензора четвертого ранга M_{ijkl} содержит 1, 2 или 3 нечетное число раз (один или три раза), то эта компонента равна нулю.

Четырехранговые номера $ijkl$, содержащие 1 нечетное число раз, образуются перестановками из

$$\begin{array}{llll} 1112, & 1113 & & \\ 1222, & 1223, & 1233, & 1333. \end{array} \tag{4.5.18}$$

Рассмотрим преобразование $x_1' = -x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$, для которого матрица преобразований имеет вид

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.5.19}$$

$$\begin{array}{lll} \alpha_{11} = -1, & \alpha_{12} = 0, & \alpha_{13} = 0, \\ \alpha_{21} = 0, & \alpha_{22} = 1, & \alpha_{23} = 0, \\ \alpha_{31} = 0, & \alpha_{32} = 0, & \alpha_{33} = 1. \end{array}$$

Выпишем компоненту M'_{ijkl} (в "штрихованной" системе координат), номер которой $ijkl$ является одним из номеров, указанных в (4.5.18). Пусть, например, это будет 1112. Из-за изотропии тензора $M'_{ijkl} = M_{ijkl}$, и в соответствии с формулой преобразования

$$M_{1112} = M'_{1112} = \alpha_{1m}\,\alpha_{1n}\,\alpha_{1p}\,\alpha_{2q}\,M_{mnpq} =$$
$$= (-\delta_{1m})\,(-\delta_{1n})\,(-\delta_{1p})\,\delta_{2q}\,M_{mnpq} = (-1)^3\,M_{1112} = -M_{1112}. \tag{4.5.20}$$

Раз $M_{1112} = -M_{1112}$, значит $M_{1112} = 0$.

Аналогично доказывается равенство нулю компонент изотропного тензора M_{ijkl}, номера которых образуются перестановкой (4.5.18), т е. содержащих 1 нечетное число раз, и аналогично для номеров, содержащих 2 или 3 нечетное число раз. Лемма 1 доказана.

Таким образом, ненулевыми компонентами изотропного тензора четвертого ранга могут быть компоненты с номерами, содержащими 1 или ни разу, или два раза, или четыре раза, содержащими 2 или ни разу, или два раза, или четыре раза, содержащими 3 или ни разу, или два раза, или четыре раза. Таковыми являются только 21 компонента, из которых независимыми являются 12 компонент

$$\begin{gathered}
M_{1111}, M_{2222}, M_{3333},\\
M_{1122}, M_{1133}, M_{2211}, M_{2233}, M_{3311}, M_{3322},\\
M_{1212} = M_{2112} = M_{1221} = M_{2121},\\
M_{1313} = M_{3113} = M_{1331} = M_{3131},\\
M_{2323} = M_{3223} = M_{2332} = M_{3232}.
\end{gathered} \tag{4.5.21}$$

В последних трех строчках здесь учтена симметрия (4.5.9).

Лемма 2: Все компоненты изотропного тензора, номера которого получаются заменой всех индексов равных 1 – на 2, а все индексы равные 2 – на 1, равны между собой. То же самое, если все индексы равные 1 поменять на 3, а равные 3 – на 1. Аналогично, если все индексы равные 2 поменять на 1 (или 3), а все индексы равные 1 (или 3) – на 2, и аналогично, если все индексы равные 3 поменять на 1 (или 2), а все индексы равные 1 (или 2) – на 3.

Действительно, для того, чтобы доказать равенство $M_{1133} = M_{2233}$ (все индексы равные 1 заменены на 2) нужно рассмотреть ортогональное преобразование $x'_1 = x_2$, $x'_2 = x_1$, $x'_3 = x_3$, чему соответствует матрица преобразования

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.5.22}$$

$$M'_{1122} = M_{2211} = M_{1122}.$$

Используя свойство изотропии (4.5.16) и формулу преобразования (1.6.1), получим

$$M_{2233} = M'_{2233} = \alpha_{2k}\,\alpha_{2l}\,\alpha_{3m}\,\alpha_{3n}\,M_{klmn} = M_{1133}.$$

Таким образом, меняя аналогично нумерацию осей координат, получим, что компоненты (4.5.21) принимают одно из трех значений, которые обозначим через $\lambda + 2\mu$, λ, μ'

$$M_{1111} = M_{2222} = M_{3333} = \lambda + 2\mu,$$

$$M_{1122} = M_{1133} = M_{2211} = M_{3311} = M_{2233} = M_{3322} = \lambda, \qquad (4.5.23)$$

$$M_{1212} = M_{2112} = M_{1221} = M_{2121} = M_{1313} = M_{3113} = M_{1331} =$$

$$= M_{3131} = M_{2323} = M_{3223} = M_{2332} = M_{3232} = \mu'.$$

а остальные компоненты тензора M_{ijkl} равны нулю.

Лемма 3: Между тремя различными значениями компонент изотропного тензора четвертого ранга с симметрией по первым двум и вторым двум индексам имеется следующая зависимость

$$M_{1111} = M_{1122} + 2M_{3333} \quad \text{или} \quad \mu = \mu', \qquad (4.5.24)$$

т.е. все компоненты тензора M_{ijkl} определяются двумя числами, а именно λ и μ.

Доказательство основано на рассмотрении преобразования поворота системы координат вокруг оси x_3 на малый угол $d\theta$, когда с точностью до членов первого порядка малости по $d\theta$ для базисных векторов преобразованного базиса имеем

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i + [d\theta\,\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_i] = \mathbf{e}_i + d\theta\,\mathbf{e}_l\,\varepsilon_{ljk}\,\mathbf{e}_{3j}\,\mathbf{e}_{ik} =$$

$$= \mathbf{e}_l\,\delta_{il} + \mathbf{e}_l\,d\theta\,\varepsilon_{ljk}\,\delta_{3j}\,\delta_{ik} = \mathbf{e}_l\,(\delta_{li} + \varepsilon_{l3k}\,d\theta). \qquad (4.5.25)$$

Отсюда, учитывая, что $\mathbf{e}'_i = \alpha_{il}\,\mathbf{e}_l$, получаем для матрицы преобразования

$$\alpha_{il} = \delta_{il} + \varepsilon_{3il}\,d\theta. \qquad (4.5.26)$$

Тогда, учитывая свойство изотропии тензора M_{ijkq} и формулу преобразования его компонент, получим

$$M_{ijkq} = M'_{ijkq} = M_{lmnp}\,\alpha_{il}\,\alpha_{jm}\,\alpha_{kn}\,\alpha_{qp} =$$

$$= M_{lmnp}(\delta_{il} + \varepsilon_{3il}\,d\theta)(\delta_{jm} + \varepsilon_{3jm}\,d\theta)(\delta_{kn} + \varepsilon_{3kn}\,d\theta)(\delta_{qp} + \varepsilon_{3qp}\,d\theta) =$$

$$+ \varepsilon_{3kn}\,\delta_{il}\,\delta_{jm}\,\delta_{qp} + \varepsilon_{3qp}\,\delta_{il}\,\delta_{jm}\,\delta_{kn} + O((d\theta)^2)] =$$

$$= M_{ijkq} + d\theta[\varepsilon_{3il}\,M_{ljkq} + \varepsilon_{3jm}\,M_{imkq} + \varepsilon_{3kn}\,M_{ijnq} + \varepsilon_{3qp}\,M_{ijkp} + O(d\theta)].$$

Отсюда получаем, что выражение в квадратных скобках должно равняться нулю. Беря предел при $d\theta \to 0$, получим

$$M_{ljkq}\,\varepsilon_{3il} + M_{imkq}\,\varepsilon_{3jm} + M_{ijnq}\,\varepsilon_{3kn} + M_{ijkp}\,\varepsilon_{3qp} = 0. \qquad (4.5.28)$$

Это равенство верно для любых i, j, k, q. Для $i = 1, j = k = q = 2$ это равенство дает

$$M_{l222}\,\varepsilon_{31l} + M_{1m22}\,\varepsilon_{32m} + M_{12n2}\,\varepsilon_{31n} + M_{122p}\,\varepsilon_{31p} = 0. \qquad (4.5.29)$$

Учитывая значения ε_{ijk} (см. § 8 гл. 1) и симметрию тензора ($M_{1221} = M_{1212}$), получим

$$M_{2222} - M_{1122} - 2\,M_{1212} = 0, \qquad (4.5.30)$$

т.е. равенство (4.5.24) доказано. Остальные наборы i, j, k, q в (4.5.28) не приводят к новым уравнениям.

Можно убедиться, что линейная комбинация изотропных "δ-образных" тензоров четвертого ранга (4.5.17) с коэффициентами λ и $\mu' \equiv \mu$ позволяет выразить все компоненты (как нулевые, так и ненулевые (4.5.23)) любого изотропного симметричного по первым двум и вторым двум индексам тензора четвертого ранга:

$$M_{ijkl} = \lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}). \qquad (4.5.31)$$

Теорема. В линейно-вязкой (линейно-упругой) изотропной среде главные оси тензора скорости деформации (тензора деформации) совпадают с главными осями тензора напряжений.

Для доказательства рассмотрим закон Гука (4.5.4) для линейно-упругой среды в главных осях тензора деформации ($\varepsilon_{11} = \varepsilon_1^*$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_2^*$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_3^*$, $\varepsilon_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Учитывая (4.5.23) для изотропной среды, где собраны ненулевые компоненты $M_{ijkl}^{(el)}$, видно что $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и ненулевыми напряжениями в главных осях тензора деформации могут быть только $\sigma_{11} \equiv \sigma_1^*$, $\sigma_{22} \equiv \sigma_2^*$, $\sigma_{33} \equiv \sigma_3^*$, это свидетельствует о том, что главные оси тензора деформации являются главными и для тензора напряжения. Аналогично теорема доказывается и для линейно-вязкой изотропной среды.

§ 6. Линейно-вязкие изотропные жидкости. Закон Навье-Стокса

В соответствии с уравнением (4.5.31) доя изотропного тензора коэффициентов вязкости, определяемого двумя числами $\mu^{(v)}$ и $\lambda^{(v)}$, из (4.5.2) имеем следующее реологическое уравнение для изотропной линейно-вязкой среды (жидкости)

$$\sigma_{ij} = -p^{(\mathrm{st})}\,\delta_{ij} + \lambda^{(\mathrm{v})}\,e_{kk}\,\delta_{ij} + 2\,\mu^{(\mathrm{v})}\,e_{ij}. \tag{4.6.1}$$

Давление, определяемое первым инвариантом, тензора напряжений и девиатор τ_{ij} тензора напряжений равны

$$p = -\tfrac{1}{3}\sigma_{ii} = p^{(\mathrm{st})} - \zeta^{(\mathrm{v})}\,e_{kk}, \qquad \zeta^{(\mathrm{v})} = \lambda^{(\mathrm{v})} + \tfrac{2}{3}\mu^{(\mathrm{v})},$$

$$\tau_{ij} = 2\,\mu^{(\mathrm{v})}(\,e_{ij} - \tfrac{1}{3}e_{kk}\,\delta_{ij}), \quad \sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \tau_{ij}. \tag{4.6.2}$$

Коэффициент $\zeta^{(\mathrm{v})}$ называется коэффициентом объемной вязкости, а $\mu^{(\mathrm{v})}$ – динамическим коэффициентом сдвиговой вязкости; используется еще и коэффициент кинематической вязкости, имеющий размерность м^2/с:

$$\nu^{(\mathrm{v})} = \mu^{(\mathrm{v})} / \rho. \tag{4.6.3}$$

Таким образом, вязкость оказывает сопротивление не только сдвигу, (это сопротивление определяется девиатором), но и объемному сжатию. Сопротивление сжатия определяется слагаемым в давлении

$$-\zeta\,e_{kk} = -\zeta\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \frac{\zeta}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}. \tag{4.6.4}$$

Если среда несжимаемая ($\rho = \mathrm{const}$), то объемная вязкость и вязкое сопротивление объемному сжатию не проявляются, и коэффициент объемного сжатия не имеет значения.

Очень часто при движении и сжимаемых жидкостей и газов проявлением объемной вязкости можно пренебречь, т.е. принять

$$p = p^{(\mathrm{st})}. \tag{4.6.5}$$

Объемная вязкость и слагаемое в давлении $\zeta\ \mathrm{div}\,\mathbf{v}$ для сжимаемых жидкостей и газов проявляются при очень быстрых сжатиях, например, в ударных волнах и при распространении высокочастотных колебаний.

Объемная вязкость может быть особенно заметной в вязких жидкостях с мелкими пузырьками.

§ 7. Гидростатика

Есть широкий класс проблем, рассматриваемых для покоящихся жидкостей относительно некоторой системы координат. Эти проблемы связаны с равновесием воды в океанах, воздуха в атмосфере, силами, действующими на корабли и подводные аппараты, устойчивость равновесных (статических) состояний.

Под равновесным и стационарным покоем понимается состояние некоторого объема жидкости, при котором в некоторой системе координат в течение рассматриваемого времени все материальные точки покоятся:

$$\mathbf{v} = 0. \tag{4.7.1}$$

Из уравнения неразрывности следует, что $\partial\rho/\partial t = 0$, т.е. поле плотности стационарно:

$$\rho = \rho(x, y, z). \tag{4.7.2}$$

Кроме того, для покоющейся жидкости тензор скоростей деформации равен нулю ($e_{ij} = 0$). Поэтому тензор напряжения не только для идеальной, но и для вязкой жидкости в гидростатике сводится к давлению:

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij}\,, \tag{4.7.3}$$

что называется *законом Паскаля*:

«*В покоящейся жидкости давление (напряжение) действует во все стороны одинаково*».

Из уравнения импульсов как для идеальной (уравнения Эйлера) так и для вязкой (уравнения Навье-Стокса) жидкостей следует

$$\nabla p = \rho\mathbf{F}. \tag{4.7.4}$$

Это уравнение можно переписать в виде $\rho^{-1}\nabla p = \mathbf{F}$ и, применяя операцию rot к обоим частям этого уравнения, получим

$$\operatorname{rot}\rho^{-1}\nabla p = \operatorname{rot}\mathbf{F}, \quad \text{или} \quad \varepsilon_{ijk}\nabla_j(\rho^{-1}\nabla_k p) = \varepsilon_{ijk}\nabla_j F_k\,,$$

Дифференцируя (оператор ∇_j) произведение в круглых скобках, имеем

$$[(\nabla\rho^{-1})\times\nabla p] + \rho^{-1}\mathrm{rot}\,\nabla p = \mathrm{rot}\,\mathbf{F}.$$

Учитывая, что $\nabla p = \rho\mathbf{F}$, и что ротор от градиента равен нулю (см. (2.5.6)), получим

$$[(\nabla\rho^{-1})\times\rho\mathbf{F}] = \mathrm{rot}\,\mathbf{F}.$$

Тогда скалярные произведения обеих частей данного уравнения на вектор $\mathbf{F}$ равны

$$\mathbf{F}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{F}\cdot[(\nabla\rho^{-1})\times\rho\mathbf{F}] = 0$$

Отсюда следует необходимое условие для поля внешних сил, чтобы было возможно равновесие жидкости в этом поле, а именно в каждой точке поля, где имеется покоящаяся жидкость, должно выполняться условие

$$\mathbf{F}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = 0, \tag{4.7.5}$$

Для потенциального поля внешних массовых сил ($\mathbf{F} = -\nabla U,\ \mathrm{rot}\,\mathbf{F} = 0$) данное условие выполняется всегда, и при этом поле градиента плотности $\nabla\rho = -\rho^{-2}\nabla\rho^{-1}$ является коллинеарным (параллельным) полю вектора внешней массовой силы $\mathbf{F}$ ($[(\nabla\rho^{-1})\times\rho\mathbf{F}] = 0$).

При заданном поле сил $\mathbf{F}$, удовлетворяющем условию (4.7.5), можно найти поле давления p и поле плотности ρ во всех точках поля, занятого жидкостью.

Равновесие жидкости в однородном поле сил тяжести. Выберем систему координат $x_1 \equiv x,\ x_2 \equiv y,\ x_3 \equiv z$, у которой ось $x_3 \equiv z$ и единичный вектор $\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{e}_z$ направлены вверх. В рассматриваемой схеме массовые силы постоянны с потенциалом U:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z \qquad (F_x = F_y = 0,\ \ F_z = -g),$$
$$U = -gz + \mathrm{const} \qquad (g = 9{,}81\ \text{м/с}^2). \tag{4.7.6}$$

Тогда из уравнения равновесия (4.7.4) следует

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\,\rho(x, y, z)\, g. \tag{4.7.7}$$

Отсюда следует

$$p = p(z), \;\; \rho = \rho\,(z), \tag{4.7.8}$$

т.е. давление и плотность в покоящейся жидкости в однородном поле сил тяжести меняются только по вертикали. Последнее уравнение (4.7.7) принимает вид:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\,\rho(z)\, g, \quad \text{или } \nabla p = -\,\rho(z)\, g\, \mathbf{e}_{\mathrm{z}}\,. \tag{4.7.9}$$

Интегрируя последнее уравнение (4.7.7) по вертикали, получим

$$p - p_0 = -\,g \int_{z_0}^{z} \rho(z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{4.7.10}$$

Таким образом, разница давлений на двух уровнях z и z_0 определяется весом столба (с единичной площадью основания) жидкости между этими уровнями.

Сила и момент, действующие на покоящееся тело (закон Архимеда). Пусть в однородном поле сил тяжести в покоящейся жидкости находится покоящееся тело, занимающее постоянный объем V, ограниченный неподвижной (фиксированной) поверхностью S (см рис. 4.7.1), все точки которой контактируют с жидкостью. Главный вектор $\mathbf{F}$ и главный момент $\mathbf{M}$ сил со стороны жидкости на это тело определяются

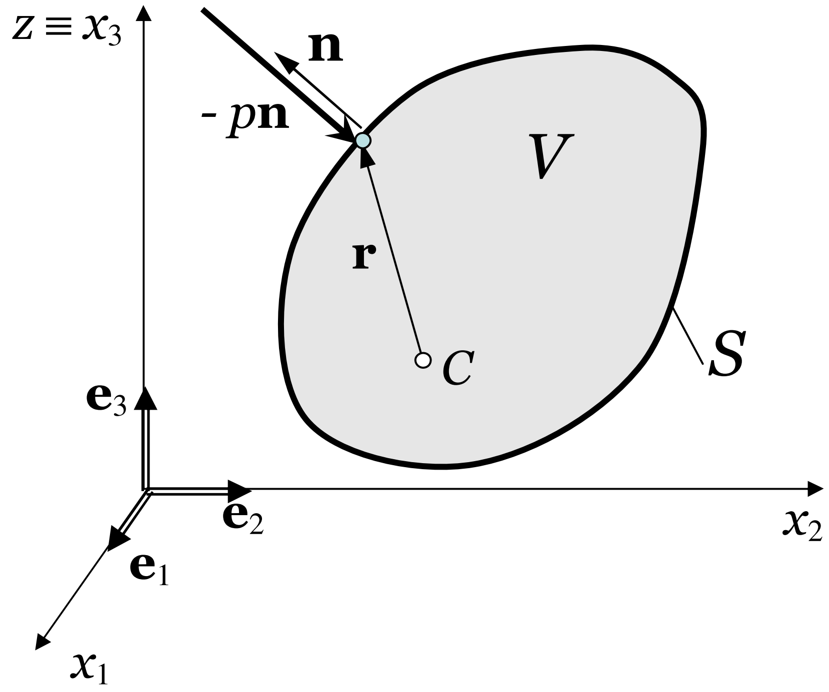

Рис 4.7.1. Покоящееся тело, погруженное в покоящуюся жидкость

интегралами по поверхности этого тела S:

$$\mathbf{F} = -\int_S p(z)\mathbf{n}\,\mathrm{d}s \equiv -\int_S p(z)\mathbf{e}_k n_k\,\mathrm{d}s\,,$$

$$\mathbf{M} = -\int_S [\mathbf{r}\times p(z)\mathbf{n}]\mathrm{d}s \equiv -\int_S p(z)\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i r_j n_k\,\mathrm{d}s\,. \qquad (4.7.11)$$

Здесь радиус-вектор $\mathbf{r}$ исходит из произвольной точки C, относительно которой вычисляется момент сил давления. Давление на поверхности тела S в обоих интегралах определяется выражением (4.7.10), откуда следует, что давление на поверхности тела такое же, как если бы внутри тела была покоящаяся жидкость, окружающая рассматриваемое тело. То есть вместо двухфазной системы жидкость-тело для расчета поверхностных интегралов рассматриваем однофазную систему из жидкости, в которой плотность и давление меняются только по вертикали (см. (4.7.8) - (4.7.10)). Поэтому эти интегралы по поверхности можно рассчитать, использую теорему Гаусса-Остроградского для фиксированной замкнутой поверхности S и уравнение (4.7.9) для градиента давления, применяя его и внутри фиксиролванного объема V внутри которого мысленно находится не рассматриваемое тело, а покоящаяся жидкость:

$$\mathbf{F} = -\int_S p(z)\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = -\int_V \nabla p\,\mathrm{d}V = \int_V \rho\, g\, \mathbf{e}_z\,\mathrm{d}V = g\,\mathbf{e}_z \int_V \rho(z)\,\mathrm{d}V.$$

$$\mathbf{M} = -\int_S p(z)\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i r_j n_k\,\mathrm{d}s = -\int_V \nabla_k \{p(z)\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i r_j\}\mathrm{d}V =$$

$$= -\int_V p(z)\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i (\nabla_k r_j)\,\mathrm{d}V - \int_V \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i r_j (\nabla_k p)\,\mathrm{d}V =$$

$$= -\mathbf{e}_i\varepsilon_{ijk}\delta_{jk}\int_V p(z)\,\mathrm{d}V - \int_V \varepsilon_{ijk}\,\mathbf{e}_i\, r_j\,\rho(z) g_k\,\mathrm{d}V. \qquad (4.7.12)$$

Учитывая, что последний интеграл в выражении для силы **F** равен массе жидкости m_V в объеме V рассматриваемого тела, причем с изменением плотности по вертикале, соответствующем гидростатике, получим формулу для силы, которая действует со стороны покоящейся жидкости на рассматриваемое тело и которая называется силой Архимеда $\mathbf{F_A}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_A} = m_V\, g\, \mathbf{e}_z. \qquad (4.7.13)$$

В выражении для момента **M**, учтем, что первое слагаемое равно нулю ($\varepsilon_{ijk}\ \delta_{jk} = 0$), а во втором слагаемом $\mathbf{e}_i$ и g_k являются постоянными величинами. Тогда выражение для момента сил можно переписать в виде

$$\mathbf{M} = -\,\mathbf{e}_i\,\varepsilon_{ijk}\, g_k \int_V r_j\,\rho(z)\,\mathrm{d}V = \int_V [\mathbf{r}\times\mathbf{g}]\,\rho(z)\mathrm{d}V. \qquad (4.7.12)$$

Если точка C, относительно которой вычисляется момент сил давления, действующих на рассматриваемое тело, выбрана в центре масс (совпадающей в однородном поле сил тяжести с центром тяжести) жидкости, мысленной помещенной в объем, занятый рассматриваемым телом, то

$$\int_V r_j\,\rho(z)\,\mathrm{d}V = 0.$$

Отсюда следует, что рассматриваемый момент сил давления относительно центра масс (центра тяжести) жидкости мысленно помещенной внутрь объема, который занят рассматриваемым телом, равен нулю.

В итоге имеем теорему гидростатики.

Теорема (*закон Архимеда*): В однородном поле сил тяжести совокупность системы сил, действующих на поверхность произвольного тела со стороны покоящейся жидкости, сводится к *силе Архимеда*, приложенной *к центру масс (центру тяжести) жидкости,* мысленно помещенной внутрь объема, который занят рассматриваемым телом.

Равновесие несжимаемой жидкости в однородном поле сил тяжести. Для однородной несжимаемой жидкости ($\rho = \rho_0$) распределение давления по вертикали описывается линейным законом

$$p - p_0 = -\rho_0 g(z - z_0) \tag{4.7.13}$$

В морской среде часто плотность соленой воды зависит от давления p, температуры T и солености S (массовой концентрации растворенной соли)

$$\rho = \rho(p, T, S). \tag{4.7.14}$$

При этом плотность воды очень мало меняется из-за роста давления по глубине, но существенно сильнее меняется из-за имеющихся изменений температуры и солености по глубине

Равновесие газа в однородном поле сил тяжести. Пусть уравнение состояния газа имеет вид

$$p = \rho RT, \tag{4.7.15}$$

где R – удельная (отнесенная к единице массы) газовая постоянная. Тогда уравнение равновесия (4.7.9) имеет вид

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{g}{R}\int_{z_0}^{z}\frac{\mathrm{d}z}{T(z)}\right). \tag{4.7.16}$$

Эта формула называется *барометрической формулой*, позволяющей по распределению температуры атмосферы по высоте определять распределение плотности.

Измерения температуры воздуха по высоте атмосферы показывают, что в примыкающем к поверхности Земли слое до высоты около 11 км, называемом *тропосферой*, распределение температуры воздуха с высотой можно аппроксимировать линейной функцией

$$T = T_0\left(1-\frac{z}{h_T}\right) \qquad (z < z_{\text{trop}} \approx 11 \text{ км}), \tag{4.7.17}$$

где T_0 = 288 K – средняя температура воздуха на поверхности Земли, h_T = 44300 м = 44,3 км. Подставляя принятую аппроксимацию $T(z)$ в (4.7.8), учитывая, что для воздуха средний молекулярный вес равен M = 29 кг/кмоль, удельная газовая постоянная равна

$$R = \mathsf{R}/\mathsf{M} = 286{,}6 \text{ м}^2/(\text{с}^2 \text{ K}), \qquad (\mathsf{R} = 8310 \text{ кг м}^2/(\text{кмоль с}^2 \text{ K})),$$

получим распределения давления и плотности по высоте тропосферы Земли ($g = 9{,}81$ м/с^2)

$$\frac{p}{p_0} = \left(1-\frac{z}{h_T}\right)^{\kappa} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\kappa}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1-\frac{z}{h_T}\right)^{\kappa-1}$$

$$\left(\kappa = \frac{gh_T}{RT_0} \approx 5{,}23, \quad p_0 \approx 1{,}0 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}, \ \rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} \approx 1{,}212 \text{ кг/м}^3\right). \tag{4.7.19}$$

Отсюда следует, что распределение давления и плотности газа в тропосфере аппроксимируется политропным (степенным) законом

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n} \qquad \left(n = \frac{\kappa}{\kappa-1} \approx 1{,}236\right). \tag{4.7.20}$$

На верхней границе тропосферы в соответствие с принятой моделью (4.7.17) давление, плотность и температура, отмеченные двойным нижним индексом 00, равны

$z = z_{\text{tr}} \approx 11$ км:

$$T_{00} \approx 217 \text{ K} = -\,56° \text{ C}, \quad p_{00} \approx 0{,}225 \text{ бар}, \quad \rho_{00} = \frac{p_{00}}{RT_{00}} \approx 0{,}362 \text{ кг/м}^3. \tag{4.7.21}$$

Выше тропосферы находится слой, называемый стратосферой, и в ней для приближенных расчетов принимается изотермическая аппроксимация распределения температуры по высоте: $T \approx T_{00}$, в соответствие с которой из уравнения равновесия (4.7.16) получим распределения давления и плотности по высоте стратосферы

$z > z_{\text{tr}} \approx 11$ км: $T \approx T_{00} \approx 217$ К,

$$p = p_{00} \exp\left(-\frac{z - z_{\text{tr}}}{h_{\text{st}}}\right), \quad \frac{\rho}{\rho_{00}} = \frac{p}{p_{00}} \quad \left(h_{\text{st}} = \frac{RT_{00}}{g} \approx 6\,325 \text{ м}\right). \qquad (4.7.18)$$

Как и тропосфере, распределение параметров по высоте, будучи изотермическим, подчиняется политропическому закону с показателем политропы $n = 1$.

Следует иметь в виду, что реальное распределение параметров в атмосфере отличается не только из-за погрешностей принятых в (4.7.14) и (4.7.18) распределений температур, но и из-за того, что воздух не покоится, а движется, что нарушает условия статики (4.7.1) и (4.7.2). В частности в атмосфере бывают сильные ветры, ураганы, смерчи и т.д. Кроме того, в атмосферу за счет нагрева лучистой энергией Солнца испаряется влага с океана, морей, озер, рек, почвы, эта влага переносится ветрами, конденсируется в виде капель и снега, после чего выпадает обратно на поверхность Земли.

Статическая устойчивость статического состояния жидкостей в поле сил тяжести. В природе и технике имеется много примеров, когда состояние равновесия нарушается из-за всегда возникающих малых отклонений.

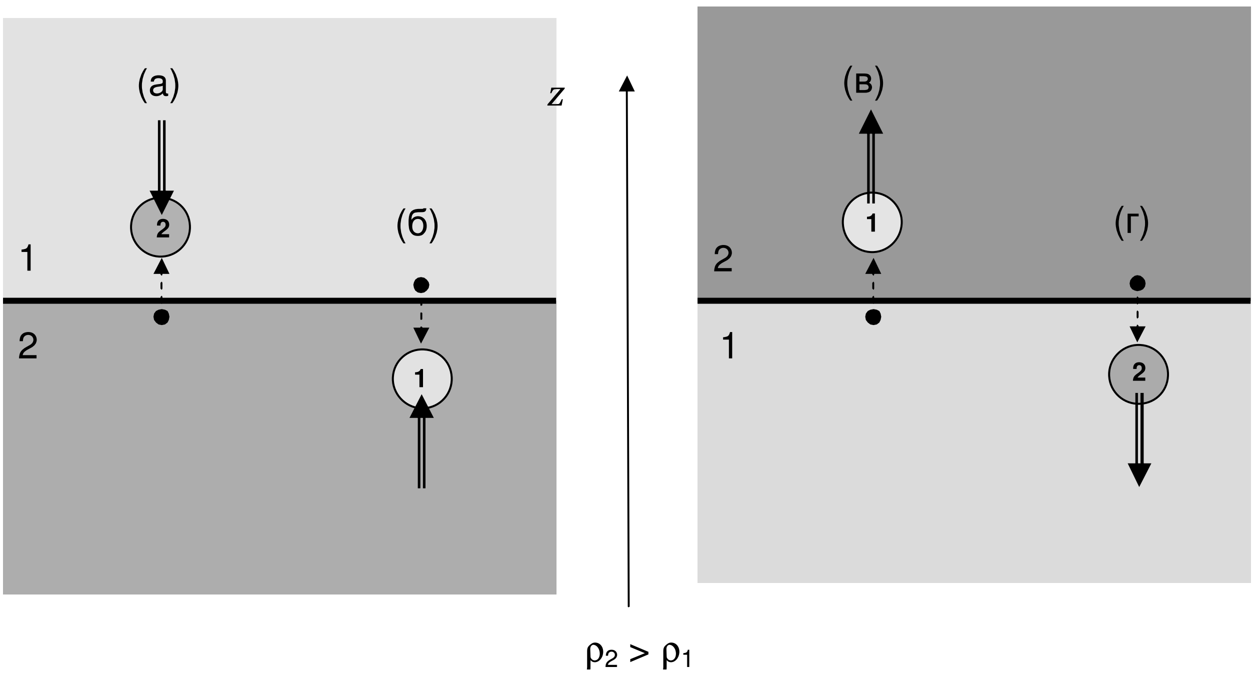

Рис. 4.7.2. Возмущения устойчивого (*а*, *б*) и неустойчивого (*в*, *г*) равновесия двух жидкостей – легкой (1) и тяжелой (2).

Пусть имеется две несмешивающиеся несжимаемые жидкости 1 и 2, с постоянными плотностями, причем плотность второй жидкости больше плотности первой: $\rho_2 > \rho_1$. Для равновесия необходимо $\rho = \rho(z)$, а это значит, что граница раздела должна быть горизонтальной (рис. 4.7.2).

Рассмотрим первый (см. левую схеме рис 4.7.2)) из двух возможных случаев, когда тяжелая жидкость (2) находится ниже легкой (1). Возможными возмущениями является попадание капли тяжелой жидкости снизу в верх в легкую (*а*) или легкой жидкости сверху вниз в тяжелую (*б*). В первом возмущении (*а*) выталкивающая Архимедова сила, определяемая плотностью легкой жидкости, будет меньше силы гравитации на каплю тяжелой жидкости и капля сверху вернется вниз к межфазной поверхности раздела двух жидкостей и утонет в «своей» жидкости. Во втором возмущении (*б*) выталкивающая Архимедова сила, определяемая плотностью тяжелой жидкости, будет больше силы гравитации на каплю легкой жидкости и капля снизу вернется вверх к межфазной поверхности раздела двух жидкостей и всплывет в «свою» жидкость. Такое состояние равновесия, когда легкая жидкость находится над тяжелой, является устойчивым, так какт отошедшие капли возвращаются в «свои» жидкости, возникающие возмущения не растут, а сходят на нет.

Перейдем ко второму случаю (см. правую схеме рис 4.7.2)), когда более тяжелая жидкость находится выше менее тяжелой. Возможными возмущениями является попадание капли легкой жидкости снизу в верх в тяжелую (*в*) и тяжелой жидкости сверху вниз в легкую (*г*). В первом возмущении (*в*) выталкивающая Архимедова сила, определяемая плотностью тяжелой жидкости, будет больше силы гравитации на каплю легкой жидкости и капля снизу вверх уйдет вверх и не вернется к межфазной поверхности раздела двух жидкостей и уйдет от «своей» жидкости. Во втором возмущении (*г*) выталкивающая Архимедова сила, определяемая плотностью легкой жидкости, будет меньше силы гравитации на каплю тяжелой жидкости и капля потонет и уйдет вниз от межфазной поверхности и от «своей» жидкости. Такое состояние равновесия, когда легкая жидкость находится под тяжелой, является неустойчивым, так как возмущения растут, и из-за всегда имеющихся возмущений легкая жидкость уходит вверх, а тяжелая вниз. Таким образом система постепенно переходит в другое равновесное состояние, когда тяжелая жидкость перейдет вниз под легкую жидкость.