§ 4. Субстанциональные производные по времени (Substantial time derivatives) для тензора напряжений

Субстанциональная или индивидуальная производная для скалярной или векторной функции, зависящей только от координат и времени, т.е. для функций типа $\rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и т.д., определяет скорость изменения соответствующей функции для фиксированных материальных точек, и является производной вдоль линии тока. Напомним, как вводятся разные производные по времени для функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$ (см. § 5 гл. 2) . Дифференциал этой функции, являющийся линейной функцией по вариациям независимых переменных $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$, $\mathrm{d}t$ определяет главную и линейную часть приращения функции от этих вариаций:

$$\mathrm{d}\varphi = (\nabla_i\varphi)\,\mathrm{d}x_i + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \varphi(\mathbf{x} + \mathrm{d}\mathbf{x}, t + \mathrm{d}t) - \varphi(\mathbf{x}, t) + o(\mathrm{d}x, \mathrm{d}t) \qquad (3.4.1)$$

Для $\mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}x_3 = 0$ ($\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$), изменение функции, отнесенное к приращению времени

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad (3.4.2)$$

дает частную производную по времени, характеризующую скорость (интенсивность) изменения φ во времени в *фиксированной точке пространства*. Вдоль лини тока $\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{v}\,\mathrm{d}t$, и величина

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + v_i(\nabla_i\varphi) \qquad (3.4.3)$$

дает субстанциональную производную по времени, характеризующую интенсивность изменения φ во времени в *фиксированной материальной точке* сплошной среды, двужущеся вдоль линии тока.

Напряжение в момент времени t на площадке, определяемой координатами x_1, x_2, x_3 и внешней единичной нормалью $\mathbf{n}$ можно рассматривать как векторную функцию, зависящую не только от $\mathbf{x}$ и t, но и от $\mathbf{n}$.

$$\boldsymbol{\sigma}_{(n)} = \boldsymbol{\sigma}_{(n)}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t). \qquad (3.4.4)$$

Аналогично (3.4.1) дифференциал этой функции, являющийся линейной функцией по вариациям независимых переменных $\mathrm{d}n_1$, $\mathrm{d}n_2$, $\mathrm{d}n_3$, $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$,

dx_3, dt определяет главную и линейную часть приращения функции от этих вариаций:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{(n)} = \boldsymbol{\sigma}_{(n)}(t + dt, \mathbf{x} + d\mathbf{x}, \mathbf{n} + d\mathbf{n},) - \boldsymbol{\sigma}_{(n)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n},) + o(dt, dx, dn) =$$

$$= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\partial t} dt + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\partial n_i} dn_i \tag{3.4.5}$$

$$(|\mathbf{n} + d\mathbf{n}| = |\mathbf{n}| = 1).$$

Для $d\mathbf{n} = 0$, $d\mathbf{x} = 0$, изменение функции $\boldsymbol{\sigma}$, отнесенное к приращению времени

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\partial t}\right)_{\mathbf{n},\mathbf{x}} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\partial t} \tag{3.4.6}$$

даёт частную производную по времени, характеризующую скорость (интенсивность) изменения напряжения $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}$ во времени на фиксированной в пространстве площадке ($\mathbf{x}$, $\mathbf{n}$) (с центром в фиксированной точке пространства ($\mathbf{x}$) и с фиксированной внешней нормалью $\mathbf{n}$), через которую "протекают" со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ различные материальные точки.

Скорость изменения напряжения на площадке, поступательно перемещающейся вместе с материальной частицей. Для приращения координат вдоль линии тока ($d\mathbf{x} = \mathbf{v}\, dt$) и при фиксированной ориентации площадки или ее нормали ($d\mathbf{n} = 0$), дифференциал

$$d_{(v)}\boldsymbol{\sigma}_{(n)} = dt\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\partial x_i}\right), \tag{3.4.7}$$

отнесенный к приращению времени даёт субстанциональную производную по времени

$$\frac{d_{(v)}\boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\partial x_i}, \tag{3.4.8}$$

характеризующую скорость изменения напряжения на площадке с фиксированной относительно системы координат наблюдателя ориентацией (определяемой фиксированной внешней нормалью $\mathbf{n}$), но в *фиксированной материальной точке (частице)*, т.е. на площадке *поступательно перемещающейся* вместе с фиксированной материальной точкой со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. В центре этой площадки находится одна и та же материальная точка, а через остальные точки этой площадки протекают различные материальные частицы за счет вращательного и деформационного движения малой материальной частицы (см. § 8 гл. 2).

Скорость изменения напряжения на площадке, поступательно перемещающейся и вращающейся вместе с материальной частицей. Если следить за изменением напряжения на фиксированной площадке, которая помимо поступательного перемещения со своей центральной материальной точкой со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{x},\, t)$ ещё вращается вместе со своей единичной нормалью $\mathbf{n}$ с угловой скоростью вращения материальной частицы $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$, то в формуле (3.4.5) следует полагать

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{v}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}\mathbf{n} = [\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{n}]\mathrm{d}t. \tag{3.4.9}$$

В проекциях эти соотношения имеют вид

$$\begin{gathered}
\mathrm{d}x_i = v_i\,\mathrm{d}t,\\
\mathrm{d}n_i = \varepsilon_{ijk}\,\omega_j\,n_k\,\mathrm{d}t = \varepsilon_{ijk}\,(\tfrac{1}{2}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\,)_j n_k\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}n_k\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{jlm}\,\nabla_l\,v_m\,\mathrm{d}t =\\
= \tfrac{1}{2}n_k\,\nabla_l\,v_m\,(\varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{lmj})\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}n_k\,\nabla_l\,v_m\,(\delta_{kl}\,\delta_{im} - \delta_{km}\,\delta_{il})\mathrm{d}t =\\
= \tfrac{1}{2}n_k\,(\nabla_k v_i - \nabla_i v_k)\mathrm{d}t = \omega_{ik}\,n_k\,\mathrm{d}t.
\end{gathered} \tag{3.4.9a}$$

Здесь использована перестановка индексов у компонент ε-тензора в соответствие с (1.9.3) и формула (1.9.21) для произведения со сверткой ε-тензоров. Подставляя (3.4.9a) в (3.4.5), получим выражение для дифференциала напряжения во времени на площадке, поступательно вращающейся и перемещающейся вместе с выделенной материальной частицей. Этот дифференциал обозначим через $\mathrm{d}_{(v\omega)}\boldsymbol{\sigma}_{(n)}$:

$$\mathrm{d}_{(v\omega)}\boldsymbol{\sigma}_{(n)} = \mathrm{d}_{(v)}\boldsymbol{\sigma}_{(n)} + \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\partial n_i}\,\omega_{ik}\,n_k\,\mathrm{d}t. \tag{3.4.10}$$

Учитывая связь (3.2.15) между $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}$ и напряжениями $\boldsymbol{\sigma}_i$ на координатных площадках ($\boldsymbol{\sigma}_{(n)} = \boldsymbol{\sigma}_i\,n_i$), имеем

$$\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\partial n_i} = \boldsymbol{\sigma}_i. \tag{3.4.11}$$

В результате получим определение субстанциональной производной по времени от напряжения, характеризующей скорость изменения напряжения во времени на площадке, поступательно перемещающейся и вращающейся вместе с выделенной материальной частицей:

$$\frac{\mathrm{d}_{(v\omega)}\boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}_{(v)}\boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\mathrm{d}t} + \omega_{ik}\,\boldsymbol{\sigma}_i\, n_k. \tag{3.4.12}$$

Далее в качестве нормали $\mathbf{n}(t)$ возьмем единичный базисный вектор $\mathbf{e}'_j(t)$, который в момент времени t совпадает с базисным вектором $\mathbf{e}_j$, после чего вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ так, что

$$\mathbf{e}'_j(t) = \mathbf{e}_j \ \ (n_k = \delta_{kj}); \qquad \mathbf{e}'_j(t + \mathrm{d}t) = \mathbf{e}_j + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_j]\mathrm{d}t,$$

Тогда для напряжений $\boldsymbol{\sigma}_j$ на площадке, которая имеет нормаль, совпадающую с базисным вектором $\mathbf{e}_j$, перемещается поступательно со скоростью $\mathbf{v}$ и вращается вместе с материальной частицей с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ из (3.4.12) получим

$$\frac{\mathrm{d}_{(v\omega)}\boldsymbol{\sigma}_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}_{(v)}\boldsymbol{\sigma}_j}{\mathrm{d}t} + \omega_{ij}\,\boldsymbol{\sigma}_i = \frac{\mathrm{d}_{(v)}\boldsymbol{\sigma}_j}{\mathrm{d}t} - \omega_{ji}\,\boldsymbol{\sigma}_i. \tag{3.4.13}$$

Рассмотрим проекцию напряжения $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}$ на единичный вектор $\boldsymbol{\mu}$, которая равна $\boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\mu}$, и она есть функция от $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{x}$, t, $\mathbf{n}$:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\mu} = f(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{x}, \mathbf{n}, t).$$

Тогда аналогично (3.4.5) дифференциал этой функции можно представить в виде

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\mu}) = \frac{\partial(\boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\mu})}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial(\boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\mu})}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i + \frac{\partial(\boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\mu})}{\partial n_i}\mathrm{d}n_i + \frac{\partial(\boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i}\mathrm{d}\mu_i\,. \tag{3.4.14}$$

Если взять

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{v}\,\mathrm{d}t && (\mathrm{d}x_i = v_i\,\mathrm{d}t),\\
&\mathrm{d}\mathbf{n} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}]\,\mathrm{d}t && (\mathrm{d}n_i = \omega_{ik}\, n_k\,\mathrm{d}t),\\
&\mathrm{d}\boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu}]\,\mathrm{d}t && (\mathrm{d}\mu_i = \omega_{ik}\,\mu_k\,\mathrm{d}t)\\
&\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \mu_i} = \mathbf{e}_i,
\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

учесть (3.4.11) и то, что $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}$ не зависит от μ_i, а $\boldsymbol{\mu}$ не зависит от n_i, получим

$$\mathrm{d}_{(v\omega)}(\boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\mu}) = \mathrm{d}_{(v)}(\boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\mu}) + \omega_{pk}(\boldsymbol{\sigma}_p \cdot \boldsymbol{\mu})n_k\, \mathrm{d}t + \omega_{pk}\, \boldsymbol{\sigma}_{(n)}\, \mathbf{e}_p\, \mu_k\, \mathrm{d}t. \qquad (3.4.16)$$

Отсюда получим определение субстанциональной производной от проекции напряжения $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}$ на единичный вектор $\boldsymbol{\mu}$, когда площадка (с внешней нормалью $\mathbf{n}$), на которой рассматривается напряжение $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}$ и единичный вектор вместе с материальной частицей поступательно перемещаются со скоростью $\mathbf{v}$ и вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ (т.е. $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\mu}$ движутся как жесткий элемент)

$$\frac{\mathrm{d}_{(v\omega)}(\boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\mu})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}_{(v)}(\boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\mu})}{\mathrm{d}t} + \omega_{pk}(\boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\mu})n_k + \omega_{pk}(\boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \mathbf{e}_p)\mu_k \qquad (3.4.17)$$

$$\frac{\mathrm{d}_{(v)}\left(\boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\mu}\right)}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial(\boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\mu})}{\partial t} + v_p\, \nabla_p(\boldsymbol{\sigma}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\mu}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\partial t} + v_p \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\partial x_p}\right).$$

Яумановская производная. Если в момент времени t принять $\mathbf{n} = \mathbf{e}_j$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{e}_i$ ($n_k = \delta_{jk}$, $\mu_k = \delta_{ik}$), то $\boldsymbol{\sigma}_k \cdot \boldsymbol{\mu} = \sigma_{ij}$ и из (3.4.17) получим выражение для субстанциональной производной от компонента (тензора напряжений) σ_{ij}, являющегося проекцией на $\mathbf{e}'_i$ вектор–проекции тензора на $\mathbf{e}'_j$, где $\mathbf{e}'_i$ и $\mathbf{e}'_j$ – пара базисных векторов, поступательно перемещающихся и вращавшихся вместе с материальной частицей, но в момент времени t совпадающих соответственно с $\mathbf{e}'_i$ и $\mathbf{e}'_j$:

$$\frac{\mathrm{d}_{(v\omega)}\sigma_{ij}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}_{(v)}\sigma_{ij}}{\mathrm{d}t} + \omega_{pj}\,\sigma_{ip} + \omega_{pi}\,\sigma_{pj} = \frac{\mathrm{d}_{(v)}\sigma_{ij}}{\mathrm{d}t} + \omega_{pi}\,\sigma_{pj} - \omega_{jp}\,\sigma_{ip}. \qquad (3.4.18)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}_{(v)}\sigma_{ij}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + v_k\, \nabla_k\, \sigma_{ij}\right)$$

Эта производная по имени ученого (G. Jaumann, 1911), предложившего её определение, называется *яумановской* производной. Её определение можно получить также из несколько других соображений. В момент времени $t + \mathrm{d}t$ компоненты тензора напряжений $\sigma(\mathbf{x} + \mathbf{v}\,\mathrm{d}t,\, t + \mathrm{d}t)$ в рассматриваемой материальной частице, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ в фиксированной декартовой системе координат, определяемой базисными векторами $\mathbf{e}_i$ (i = 1, 2, 3) имеет вид

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x} + \mathbf{v}\,\mathrm{d}t,\ t + \mathrm{d}t) = \sigma_{ij}(\mathbf{x},\ t) + \frac{\mathrm{d}_{(v)}\sigma_{ij}}{\mathrm{d}t} + o(\mathrm{d}t). \qquad (3.4.19)$$

Рассмотрим компоненты тензора $\mathbf{S}(\mathbf{x} + \mathbf{v}\,\mathrm{d}t,\ t + \mathrm{d}t) = \sigma_{ij}(\mathbf{x} + \mathbf{v}\,\mathrm{d}t,\ t + \mathrm{d}t)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ в другой декартовой системе координат, определяемой векторами $\mathbf{e}'_i$ (i = 1, 2, 3), в которые перешли базисные вектора $\mathbf{e}_i$ (i = 1, 2, 3) в точке M за счёт поступательного и вращательного вокруг точки M движения вместе с рассматриваемой материальной частицей

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}'_i + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i]\mathrm{d}t. \qquad (3.4.20)$$

Выкладками, аналогичными (3.4.9a), получаются формулы преобразования координат

$$\mathbf{e}'_i = \alpha_{ip}\,\mathbf{e}_p, \quad \alpha_{ip} = \delta_{ip} + \omega_{pi}\,\mathrm{d}t. \qquad (3.4.21)$$

Действительно

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}'_i + \varepsilon_{pkl}\,\omega_k\,\delta_{li}\,\mathbf{e}_p\,\mathrm{d}t = \mathbf{e}_p\,(\delta_{pi} + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}t\,\varepsilon_{kip}\,\varepsilon_{kqm}\,\nabla_q\,v_m) =$$

$$= \mathbf{e}_p\,(\delta_{pi} + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}t(\delta_{iq}\,\delta_{pm} - \delta_{im}\,\delta_{pq})\nabla_q\,v_m) = \mathbf{e}_p\,(\delta_{pi} + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}t(\nabla_i\,v_p - \nabla_p\,v_i)).$$

Используя формулы преобразования компонент тензора 2-го ранга, получим, что в базисе $\mathbf{e}'_i$ (i = 1, 2, 3) компоненты (снабжённые штрихом) тензора $\sigma(\mathbf{x} + \mathbf{v}\,\mathrm{d}t,\ t + \mathrm{d}t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij}(\mathbf{x} + \mathbf{v}\,\mathrm{d}t,\ t + \mathrm{d}t) &= \alpha_{ip}\,\alpha_{jq}\,\sigma_{pq}\,(\mathbf{x} + \mathbf{v}\,\mathrm{d}t,\ t + \mathrm{d}t) =\\ &= (\delta_{ip} + \omega_{pi}\,\mathrm{d}t)(\delta_{jq} + \omega_{qj}\,\mathrm{d}t)(\sigma_{pq}(\mathbf{x},\ t) + \mathrm{d}_{(v)}\sigma_{pq}) =\\ &= \sigma_{ij}(\mathbf{x},\ t) + \mathrm{d}_{(v)}\sigma_{ij} + \sigma_{iq}\,\omega_{qj}\,\mathrm{d}t + \sigma_{pj}\,\omega_{pi}\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t),\end{aligned} \qquad (3.4.22)$$

откуда следует определение яумановской производной

$$\frac{\mathrm{d}_{(v\omega)}\sigma_{ij}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t\to o}\frac{\sigma'_{ij}\left(\mathbf{x}+\mathbf{v}\,\mathrm{d}t,\ t+\mathrm{d}t\right)-\sigma_{ij}\left(\mathbf{x},t\right)}{\mathrm{d}t},$$

приводящее к (3.4.18).

Скорость изменения напряжение на материальной площадке.* Для того чтобы проследить за изменением напряжения $\boldsymbol{\sigma}_n$ на фиксированной *материальной* площадке, следует учесть не только поступательное ее переме-

* Этот подраздел не входит в обязательный курс.

щение и вращение, но и деформационное движение (характеризуемое тензором скоростей деформаций). Последнее движение может нарушить перпендикулярность материальной площадки и вектора $\mathbf{n}(t + \mathrm{d}t) = \mathbf{n}(t)\ [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}]\mathrm{d}t$. Покажем, как найти изменение направления нормали к выделенной материальной площадке.

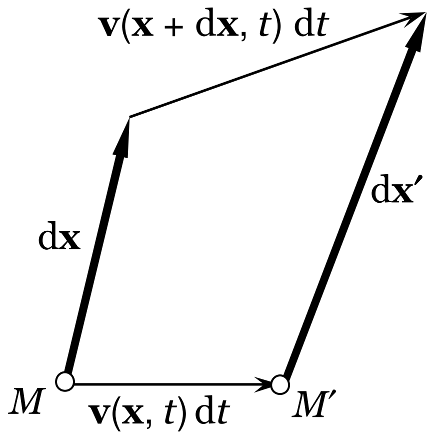


Рис. 3.4.1.

Выделим малый материальный отрезок, определяемый в момент времени t вектором $\mathrm{d}\mathbf{x}$, исходящим из материальной точки M (см. рис. 3.4.1). Спустя малое время $\mathrm{d}t$, т.е. в момент $t + \mathrm{d}t$ этот материальный отрезок займет положение $\mathrm{d}\mathbf{x}'$ (см. также анализ рис. 2.8.1)

$$\mathrm{d}\mathbf{x}' = \mathrm{d}\mathbf{x} + \mathbf{v}\,(\mathbf{x} + \ \mathrm{d}\mathbf{x},\, t)\mathrm{d}t - \mathbf{v}\,(\mathbf{x},\, t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) =$$
$$= \mathrm{d}\mathbf{x} + (\nabla_i\mathbf{v})\mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t,\, \mathrm{d}x), \qquad (3.4.24)$$

где $\mathrm{d}x_i$ – компоненты вектора (материального отрезка) $\mathrm{d}\mathbf{x}$. Последнее равенство в проекциях приводит к формуле линейного преобразования компонент малого материального отрезка $\mathrm{d}\mathbf{x}$ в малой частице сплошной среды при ее перемещении за малое время $\mathrm{d}t$ (см. (2.7.30) и (2.7.27)):

$$\mathrm{d}x_i' = c_{ik}\ \mathrm{d}x_k, \quad c_{ik} = \delta_{ik} + \nu_{ik}\,\mathrm{d}t,$$

$$\nu_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \omega_{ik} + e_{ik}, \qquad (3.4.25)$$

$$\omega_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right), \qquad e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right).$$

При этом из-за малости $\mathrm{d}t$ имеет место

$$\nu_{ik}\,\mathrm{d}t << 1, \qquad (3.4.26)$$

благодаря чему матрица $C^{-1} = \left(c_{ik}^{(-1)}\right)$, (обратная матрице $C(c_{ik})$) определяется следующей формулой

$$c_{ik}^{(-1)} = \delta_{ik} - \nu_{ik}\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t), \qquad (3.4.27)$$

что нетрудно получить непосредственным вычислением или удостовериться проверкой того, что $C^{-1}C = E$. Действительно

$$c_{ik}^{(-1)} c_{kj} = (\delta_{ik} - \nu_{ik}\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t))(\delta_{kj} - \nu_{kj}\,\mathrm{d}t) =$$

$$= \delta_{ik}\delta_{ki} - \nu_{ik}\,\delta_{ki}\,\mathrm{d}t + \nu_{ki}\,\delta_{ik}\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) = \delta_{ij} - \nu_{ij}\,\mathrm{d}t + \nu_{ji}\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) = \delta_{ij}.$$

Поэтому, умножив уравнение (3.4.25) на $c_{ji}^{(-1)}$ отбросив малые величины более высокого порядка, чем $\mathrm{d}x_j$ и $\mathrm{d}t$, получим

$$c_{ji}^{(-1)}\,\mathrm{d}x'_i = c_{ji}^{(-1)}\, c_{ik}\,\mathrm{d}x_k = \delta_{jk}\,\mathrm{d}x_k = \mathrm{d}x_j.$$

Таким образом, получим формулы обратного преобразования

$$\mathrm{d}x_j = c_{ji}^{(-1)}\,\mathrm{d}x'_i \quad (c_{ji}^{(-1)} = \delta_{ji} - \nu_{ji}\,\mathrm{d}t = \delta_{ji} - \omega_{ji}\,\mathrm{d}t - e_{ji}\,\mathrm{d}t. \qquad (3.4.28)$$

Для всех материальных точек, лежавших в момент времени t на плоскости, проходящей через точку M ($\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$), и имеющей нормаль $\mathbf{n} = n_k\,\mathbf{e}_k$ имеет место уравнение

$$n_k\,\mathrm{d}x_k = 0. \qquad (3.4.29)$$

Подставляя сюда уравнение (3.4.28), имеем

$$n_k\, c_{ki}^{(-1)}\,\mathrm{d}x'_i = 0,$$

что даёт уравнение плоскости, проходящей через точку $M'(\mathrm{d}x'_i = 0)$:

$$\tilde{n}'_i\,\mathrm{d}x'_i = 0, \quad \tilde{n}'_i = c_{ki}^{(-1)}\,n_k = (\delta_{ki} - \omega_{ki}\,\mathrm{d}t - e_{ki}\,\mathrm{d}t)n_k. \qquad (3.4.30)$$

Найдём длину вектора $\tilde{\mathbf{n}} = \tilde{n}'\,\mathbf{e}_i$:

$$(\tilde{n}')^2 = \tilde{n}'_i\,\tilde{n}'_i = (\delta_{ki} - \nu_{ki}\,\mathrm{d}t)(\delta_{li} - \nu_{li}\,\mathrm{d}t)n_k\,n_l =$$

$$= (\delta_{ki}\,\delta_{li} - \nu_{ki}\,\mathrm{d}t\,\delta_{li} - \nu_{li}\,\mathrm{d}t\,\delta_{ki} + o(\mathrm{d}t))n_k\,n_l =$$

$$= (\delta_{kl} - \nu_{kl}\,\mathrm{d}t - \nu_{lk}\,\mathrm{d}t)n_k\,n_l = n_k\,n_l - \mathrm{d}t(\nu_{kl} + \nu_{lk})n_k\,n_l =$$

$$= 1 - \mathrm{d}t(\omega_{kl} + e_{kl} + \omega_{lk} + e_{lk})n_k\,n_l =$$

$$= 1 - \mathrm{d}t(\omega_{kl} - \omega_{kl} + e_{kl} + e_{kl})n_k\,n_l = 1 - 2e_{kl}\,n_k\,n_l\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t).$$

Следовательно

$$\tilde{n}' = 1 - e_{pq}\, n_p\, n_q\, \mathrm{d}t + \mathrm{o}(\mathrm{d}t). \tag{3.4.31}$$

Нормируя $\tilde{\mathbf{n}}'_i$, получим, что единичный вектор $\mathbf{n}' = n'_i\, \mathbf{e}'_i$, нормальный к выделенной материальной плоскости в момент времени $t + \mathrm{d}t$ определяется следующим выражением

$$n'_i = \frac{\tilde{n}'_i}{\tilde{n}'} = \frac{(\delta_{ki} - \omega_{ki}\mathrm{d}t - e_{ki}\mathrm{d}t)\, n_k}{1 - e_{pq} n_p n_q \mathrm{d}t} + \mathrm{o}(\mathrm{d}t) =$$

$$= (\delta_{ki} - \omega_{ki}\,\mathrm{d}t - e_{ki}\,\mathrm{d}t\,)n_k\,(1 + e_{pq}\, n_p\, n_q\, \mathrm{d}t) + \mathrm{o}(\mathrm{d}t) =$$

$$= \{\delta_{ki} + \mathrm{d}t(e_{pq}\, n_p\, n_q - \omega_{ki} - e_{ki})\}n_k + \mathrm{o}(\mathrm{d}t).$$

Напомним, что здесь $\mathbf{n} = n_k\, \mathbf{e}_k$ единичный вектор нормальный к выделенной материальной площадке в момент времени t. В результате получим выражение для производной от единичной нормали к выделенной материальной площадке (с помощью единичной нормали $\mathbf{n}$),

$$\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{n'_i - n_i}{\mathrm{d}t} = \{\omega_{ik} - (e_{ik} - e_{pq}\, n_p\, n_q\, \delta_{ik})\}n_k. \tag{3.4.32}$$

Здесь учтено, что $\omega_{ik} = -\,\omega_{ki}$, $e_{ik} = -\,e_{ki}$. Таким образом, деформация вносит свой вклад в скорость перемещения конца единичной нормали к выделенной материальной площадке относительно ее центральной точки. Поэтому, если следить за изменением напряжения на выделенной материальной площадке, то в формуле (3.4.5) для $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_{(n)}$ вместо (3.4.9) или (3.4.9а) следует принять

$$\mathrm{d}x_i = v_i\, \mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}n_i = \tilde{\omega}_{ik}\, n_k \quad (\tilde{\omega}_{ik} = \omega_{ik} - (e_{ik} - e_{pq}\, n_p\, n_q\, \delta_{ik})). \tag{3.4.33}$$

Тогда аналогично (3.4.12) определение субстанциональной производной по времени от напряжения $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}$, характеризующей скорость изменения напряжения во времени на выделенной *материальной* площадке, имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}_{(v\omega)}\boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}_{(v)}\boldsymbol{\sigma}_{(n)}}{\mathrm{d}t} + \tilde{\omega}_{ik}\, \boldsymbol{\sigma}_i\, n_k. \tag{3.4.34}$$

Заметим, что в отличие от ω_{ik} величина $\tilde{\omega}_{ik}$ зависит от $\mathbf{n}$. Рассчитаем $\tilde{\omega}_{ik}\, n_k$ для $\mathbf{n} = \mathbf{e}_j$ ($n_k = \delta_{kj}$). При этом скаляр $e_{pq}\, n_p\, n_q$, определяемый тензором $\mathbb{E}$ и вектором $\mathbf{n}$, для $\mathbf{n} = \mathbf{e}_j$ равен

$$e_{pq}\, n_p\, n_q = \sum_p \sum_q e_{pq}\, n_p\, n_q = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} e_{pq}\, \delta_{pj}\, \delta_{qj} = e_{(jj)} = \begin{cases} e_{11}, \text{ если } j = 1; \\ e_{22}, \text{ если } j = 2; \\ e_{33}, \text{ если } j = 3. \end{cases} \quad (3.4.35)$$

Подчеркнем, что здесь $e_{(jj)}$ в отличие от суммы (свертки) e_{jj}, обозначает одну из трех компонент тензора скорости деформации $\mathcal{E}$ с одинаковым индексом. Далее для $\mathbf{n} = \mathbf{e}_j$ получим значение $\tilde{\omega}_{ik}\, n_k$:

$$\tilde{\omega}_{ik}\, n_k = (\omega_{ik} - e_{ik} + e_{(jj)}\, \delta_{ik})\delta_{kj} = \omega_{ij} - e_{ij} + e_{(jj)}\, \delta_{ij} = -\, \omega_{ji} - e_{ji} + e_{(jj)}\, \delta_{ij}. \quad (3.4.36)$$

Тогда для напряжения $\boldsymbol{\sigma}_j$ на материальной площадке, в момент времени t имеющей нормаль, которая совпадает с базисным вектором $\mathbf{e}_j$, получим аналогично (3.4.13)

$$\frac{\mathrm{d}_{(v\omega e)}\boldsymbol{\sigma}_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}_{(v)}\boldsymbol{\sigma}_j}{\mathrm{d}t} - (\omega_{ji} + e_{ji})\boldsymbol{\sigma}_i + e_{(jj)}\boldsymbol{\sigma}_j. \quad (3.4.37)$$

Отметим, что в последнем слагаемом нет суммирования по j. Для скорости изменения растягивающего или сжимающего нормального напряжения $\sigma_{(nn)} = \sigma_{nl}\, n_n\, n_l$ материальной площадке, выделенной в момент t нормалью $\mathbf{n} = n_k\, \mathbf{e}_k$, аналогично (3.4.5) имеем

$$\frac{\mathrm{d}_{(v\omega e)}\sigma_{(nn)}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\sigma_{(nn)}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\sigma_{(nn)}}{\partial x_k}\,\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\sigma_{(nn)}}{\partial n_k}\,\frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t}$$

$$(\mathrm{d}x_k = v_k\, \mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}n_k = \tilde{\omega}_{kl}\, n_l, \quad \sigma_{(nn)} = \sigma_{kl}\, n_k\, n_l).$$

Откуда, учитывая, что

$$\frac{\partial\sigma_{(nn)}}{\partial n_k} = \frac{\partial}{\partial n_k}(\sigma_{lm}\, n_l\, n_m) = \sigma_{lm}\, \delta_{lk}\, n_m + \sigma_{lm}\, \delta_{mk}\, n_l =$$

$$= \sigma_{km}\, n_m + \sigma_{lk}\, n_l = \sigma_{mk}\, n_m + \sigma_{lk}\, n_l = 2\sigma_{mk}\, n_m,$$

получим

$$\frac{\mathrm{d}_{(v\omega e)}\sigma_{(nn)}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial\sigma_{lm}}{\mathrm{d}t} + v_k\frac{\partial\sigma_{lm}}{\partial x_k}\right) n_l\, n_m + 2\sigma_{mk}\,\tilde{\omega}_{kl}\, n_m\, n_l = \left(\frac{\mathrm{d}_{(v)}\sigma_{lm}}{\mathrm{d}t} + 2\sigma_{mk}\,\tilde{\omega}_{kl}\right) n_m\, n_l.$$

И, в частности, от нормальных напряжений на материальных площадках, совпадающих в момент t с координатами площадки ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_j$), имеем ($\tilde{\omega}_{kl}\, n_l = \omega_{kj} - e_{kj} + e_{(jj)}\, \delta_{kj}$)

$$\frac{d_{(\upsilon\omega e)}\sigma_{(jj)}}{dt} = \frac{d_{(\upsilon)}\sigma_{(jj)}}{dt} = 2\omega_{\underset{\smile}{j}i}\,\sigma_{i\underset{\smile}{j}} + 2e_{(jj)}\,\sigma_{(jj)} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Здесь во втором слагаемом в правой части $\omega_{\underset{\smile}{j}i}\,\sigma_{i\underset{\smile}{j}}$ по подчеркнутым индексам j нет суммирования.

Нетрудно показать, что отличие скорости изменения напряжения на материальной площадке $d_{(\upsilon\omega e)}\boldsymbol{\sigma}_j/dt$ от яумановской производной $d_{(\upsilon\omega)}\boldsymbol{\sigma}_j/dt$ связано со слагаемыми, содержащими только компоненты тензора напряжений и тензора скорости деформаций. В уравнения составных, определяющих изменение тензора напряжений σ_{ij} в материальной точке (частице) по скорости ее деформирования e_{kl}, указанные слагаемые, определяемые только значениями σ_{ij} и e_{kl}, могут быть внесены в сами уравнения состояния

$$\frac{d_{(\upsilon\omega)}\sigma_{ij}}{dt} = f(\sigma_{mn}, e_{kl}).$$

§ 5. Дифференциальные уравнения механики сплошной среды в криволинейных уравнениях

В данном курсе основные уравнения механики записываются в прямоугольной декартовой системе координат. Однако при решении некоторых задач бывает удобнее использовать и криволинейные координаты, например, цилиндрические, сферические, эллиптические и др. Поэтому необходимо рассмотреть переход от уравнений, записанных в прямоугольных (декартовых) координатах к уравнениям в криволинейных координатах. Общее тензорное исчисление позволяет записывать уравнения механики в произвольных криволинейных координатах (см. учебники Л.И. Седова, А.А. Ильюшина и курс лекций М.Э. Эглит). В данном курсе общее тензорное исчисление не излагается, поэтому запись уравнений в криволинейных координатах рассмотрим отдельно. При этом ограничимся только ортогональными криволинейными координатами, к которым в частности, относятся цилиндрические и сферические координаты. Обобщения на неортогональные криволинейные координаты, хотя и не представляет больших принципиальных осложнений, но требуют более громоздких выкладок.

Символы Кристофеля. Единичные базисные вектора криволинейной ортогональной системы координат будем обозначать через $\mathbf{e}'_i$, а координаты через ξ'_i. Направления этих базисных векторов меняется от течки к точке, но они остаются ортонормированными

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}'_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{3.5.1}$$

а ортонормированные базисные вектора и координаты точек в декартовой прямоугольной системе координат по-прежнему будут обозначаться через $\mathbf{e}_k$ и x_k. При этом $\mathbf{e}_k$ (k = 1, 2, 3) в отличие от $\mathbf{e}'_i$ фиксированы*. Изменение базисных векторов криволинейной система координат будем задавать с помощью так называемых символов Кристофеля $\Gamma_{(ik)l}$:

$$\nabla'_k \mathbf{e}'_i \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathbf{e}'_i = \Gamma_{(ik)l}\, \mathbf{e}'_i \quad (k, l, i = 1, 2, 3). \tag{3.5.2}$$

При этом, так как $\mathbf{e}'_i$ всегда единичный вектор, то его производная $\nabla_k \mathbf{e}'_i$ ортогональна к $\mathbf{e}'_i$:

$$\Gamma_{(1k)1} = \Gamma_{(2k)2} = \Gamma_{(3k)3} = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \tag{3.5.3}$$

Таким образом, поведение базисных векторов в окрестности каждой точки определяется девятью векторами (3.5.2), из которых три вектора $\nabla_k \mathbf{e}'_1$ ортогональны $\mathbf{e}'_1$, три вектора $\nabla_k \mathbf{e}'_2$, ортогональны $\mathbf{e}'_2$ и три вектора $\nabla_k \mathbf{e}'_3$, ортогональны $\mathbf{e}'_3$. В итоге поведение базисных векторов определяется 18 независимыми числами – символами Кристофеля. Заметим, что символы Кристофеля не являются компонентами какого-либо тензора, что видно хотя бы из того, что для декартовой системы координат с базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ они все равны нулю, а в криволинейной системе координат с базисными с ортонормированными базисными векторами $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ они не все равны нулю.

Вектор скорости $\mathbf{v}$ и тензор напряжений $\mathbf{S}$ в криволинейной («штриховой») ортогональной системе координат имеет вид

---

* В тензорном исчислении используют базисные вектора $\mathbf{Э}_i = \partial \mathbf{r} / \partial \xi_i$ (см. § 7 гл. 2). Базисные вектора $\mathbf{e}'_i$ для ортогональной системы координат получаются из $\mathbf{Э}_i$ после нормировки: $\mathbf{e}'_i = \mathbf{Э}_i / |\mathbf{Э}_i|$.

$$\mathbf{v} = v_i' \, \mathbf{e}_i', \quad \sigma = \sigma_{ik}' \, \mathbf{e}_i' \, \mathbf{e}_k'. \tag{3.5.4}$$

Выражения для дифференциальных операторов в криволинейных координатах. В связи с тем, что в уравнения неразрывности и импульса входят производные по пространственным координатам, записанными в виде скалярного или полиадного произведения с оператором ∇ и потому рассматриваемыми как тензорные поля, переход к криволинейным (хотя и ортогональным координатам) не тривиален. Этот переход не сводится только к замене ∇_i на ∇_i', v_i на v_i', $\sigma_{ij}\sigma_{ij}$ на σ_{ij}', а требуется учесть переменность базисных векторов и базисных диад, так как базисные векторы $\mathbf{e}_i'$ и базисные диады $\mathbf{e}_i'$, $\mathbf{e}_j'$ изменяются от точки к точке. И дифференцировать по пространственным координатам (т.е. использовать оператор ∇_i') приходится не только компоненты векторов и тензоров (v_i', σ_{kl}'), но и базисные векторы и базисные диады.

Тензоры первого ранга или векторы типа $\nabla\varphi = \mathrm{grad}\,\varphi$, а также тензоры второго ранга типа $\nabla\rho\mathbf{v}$ и тензоры третьего ранга типа $\mathbf{v}\nabla\mathbf{v}$, $\nabla\sigma$, свертки которых $\nabla_k \rho\, v_k$, $v_k \nabla_k v_i$ и $\nabla_k \sigma_{ki}$ входят в уравнения неразрывности и импульса и получающиеся дифференцированием соответственно $\mathbf{v}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ по координатам ξ_i, т.е. с помощью полиадного произведения на дифференциальный оператор “набла”

$$\nabla = \mathbf{e}_k' \, \nabla_k' \equiv \mathbf{e}_1' \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \mathbf{e}_2' \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \mathbf{e}_3' \frac{\partial}{\partial \xi_3} \tag{3.5.5}$$

имеют вид

$$\mathrm{grad}\,\varphi \equiv \nabla\varphi = \mathbf{e}_k' \, \nabla_k' \varphi,$$

$$\nabla\rho\mathbf{v} = \mathbf{e}_k'(\nabla_k'(\rho\, v_i' \, \mathbf{e}_i')) = (\nabla_k' \rho\, v_i')(\mathbf{e}_k' \, \mathbf{e}_i') + \rho\, v_i'(\mathbf{e}_k'(\nabla_k' \, \mathbf{e}_i')),$$

$$\mathbf{v}\nabla\mathbf{v} = (v_k' \, \mathbf{e}_k')(\mathbf{e}_i' \, \nabla_i'(v_j' \, \mathbf{e}_j')) = v_k' \, \nabla_i' \, v_j'(\mathbf{e}_k' \, \mathbf{e}_i' \, \mathbf{e}_j') + v_k' \, v_j'(\mathbf{e}_k' \, \mathbf{e}_i'(\nabla_i' \, \mathbf{e}_j')),$$

$$\nabla\sigma = \mathbf{e}_k'(\nabla_k'(\sigma_{ij}' \, \mathbf{e}_i' \, \mathbf{e}_j')) = (\nabla_k' \, \sigma_{ij}')(\mathbf{e}_k' \, \mathbf{e}_i' \, \mathbf{e}_j') + \tag{3.5.6}$$

$$+ \sigma_{ij}'(\mathbf{e}_k'(\nabla_k' \, \mathbf{e}_i')\mathbf{e}_j') + \sigma_{ij}'(\mathbf{e}_k' \, \mathbf{e}_i'(\nabla_k' \, \mathbf{e}_j')).$$

Учитывая линейность полиадного произведения (см. § 4 гл. 1) последние слагаемые (3.5.6) с учетом (3.5.2) можно представить в виде

$$\upsilon'_i\,(\mathbf{e}'_k(\nabla'_k\,\mathbf{e}'_i)) = \rho\,\upsilon'_i\,\Gamma_{(ik)j}(\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_j) = \rho\,\upsilon'_m\,\Gamma_{(mk)i}(\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i),$$

$$\upsilon'_k\,\upsilon'_j\,(\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i\,\nabla'_i\,\mathbf{e}'_j) = \upsilon'_k\,\upsilon'_j\,\Gamma_{(ji)l}(\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i\,\mathbf{e}'_l) = \upsilon'_k\,\upsilon'_m\,\Gamma_{(mi)j}(\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i\,\mathbf{e}'_j),$$

$$\sigma'_{ij}\,(\mathbf{e}'_k(\nabla'_k\,\mathbf{e}'_i)\,\mathbf{e}'_j) = \sigma'_{ij}\,\Gamma_{(ik)l}(\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i\,\mathbf{e}'_l) = \sigma'_{mj}\,\Gamma_{(mk)l}(\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i\,\mathbf{e}'_j), \quad (3.5.7)$$

$$\sigma'_{ij}\,(\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i(\nabla'_k\,\mathbf{e}'_j)) = \sigma'_{ij}\,\Gamma_{(jk)l}(\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i\,\mathbf{e}'_j) = \sigma'_{im}\,\Gamma_{(mk)j}(\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i\,\mathbf{e}'_j).$$

Здесь при записи окончательных выражений изменялись повторяющиеся немые индексы, а именно: i и j на m и i, j и l на m и j, i и l на m и i, j и l на m и j. В итоге для дифференциальных тензоров $\nabla\mathbf{v}$ и $\nabla\sigma$ получим разложения по базису $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$

$$\nabla\rho\mathbf{v} = (\nabla'_k\,\rho\,\upsilon'_i + \rho\,\upsilon'_m\,\Gamma_{(mk)l})(\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i),$$

$$\mathbf{v}\nabla\mathbf{v} = (\upsilon'_k\,\nabla'_i\,\upsilon'_j + \upsilon'_k\,\upsilon'_m\,\Gamma_{(mi)j})(\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i\,\mathbf{e}'_j), \quad (3.5.8)$$

$$\nabla\sigma = (\nabla'_k\,\sigma'_{ij} + \sigma'_{mj}\,\Gamma_{(mk)i} + \sigma'_{im}\,\Gamma_{(mk)j})(\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i\,\mathbf{e}'_j).$$

В уравнение неразрывности входит скаляр-свертка, или дивергенция $\nabla_k\,\rho\,\upsilon_k$, а в уравнения импульсов вектора-свёртки $\mathbf{e}_i\,\nabla_k\,\sigma_{ki}$ и $\mathbf{e}_k\,\upsilon_k\,\nabla_k\,\upsilon_i$, которые в разделениях на вектора базиса $\mathbf{e}'_i$**,** имея в виду что $\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i = \delta_{ki}$, (см.(3.5.1)) выражается через $\rho\,\upsilon'_i$, υ'_i и σ'_{kl}:

$$\nabla_k\,\rho\,\upsilon_k = (\nabla\cdot\rho\mathbf{v}) \equiv \mathrm{div}\,\rho\mathbf{v} = (\nabla'_k\,\rho\,\upsilon'_i + \upsilon'_m\,\Gamma_{(mk)i})(\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i) = \nabla'_k(\rho\,\upsilon'_k) + \upsilon'_m\,\Gamma_{(mk)k},$$

$$\upsilon_k\,\nabla_k\,\mathbf{v} \equiv (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = (\upsilon'_k\,\nabla'_i\,\upsilon'_j + \upsilon'_k\,\upsilon'_m\,\Gamma_{(mi)j})(\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i)\,\mathbf{e}'_j = (\upsilon'_k\,\nabla'_k\,\upsilon'_j + \upsilon'_k\,\upsilon'_m\,\Gamma_{(mk)j})\,\mathbf{e}'_j,$$

$$\nabla_k\,\boldsymbol{\sigma}_k \equiv \nabla\cdot\sigma = (\nabla'_k\,\sigma'_{kj} + \sigma'\Gamma_{(mk)i} + \sigma'_{im}\,\Gamma_{(mk)j})(\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i)\,\mathbf{e}'_j = \quad (3.5.9)$$

$$= (\nabla'_k\,\sigma'_{kj} + \sigma'_{jm}\,\Gamma_{(mk)k} + \sigma'_{km}\,\Gamma_{(mk)j})\,\mathbf{e}'_j.$$

Здесь учтено, что тензор напряжения симметричный:

$$\sigma'_{jm} = \sigma'_{mj}. \quad (3.5.10)$$

В итоге уравнения неразрывности и импульса, в криволинейных ортогональных координатах, не зависящих от времени ($\partial\,\mathbf{e}'_i/\mathrm{d}t = 0$), имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho\upsilon'_k}{\partial\xi_k} + \rho\,\upsilon'_m\,\Gamma_{(mk)k} = 0, \quad (3.5.11)$$

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon'_k}{\partial t} + \upsilon'_k\,\nabla'_k\,\upsilon'_j + \upsilon'_k\,\upsilon'_m\,\Gamma_{(mk)j}\right) = \nabla'_k\,\sigma'_{kj} + \sigma'_{jm}\,\Gamma_{(mk)k} + \sigma'_{km}\,\Gamma_{(mk)j} + \rho F_j.$$

Рассмотрим также выражение для компонент тензора деформации и тензора скоростей деформации в ортогональных криволинейных координатах, исходя из (2.7.22) и (2.8.6) и полагая в указанных формулах $\mathbf{Э}_i = \mathbf{e}'_i$

$$\varepsilon'_{ij} = \tfrac{1}{2}[\mathbf{e}'_i \nabla'_j (w'_k \mathbf{e}'_k) + \mathbf{e}'_j \nabla'_i (w'_k \mathbf{e}'_k) - (\nabla'_i (w'_m \mathbf{e}'_m))(\nabla'_j (w'_k \mathbf{e}'_k))] =$$

$$= \tfrac{1}{2}[\nabla'_j w'_i + w'_k \Gamma_{(kj)i} + \nabla'_i w'_j + w'_k \Gamma_{(ki)j} - (\nabla'_i w'_m)(\nabla'_j w'_m) -$$

$$- w'_m \Gamma_{(mi)k} \nabla'_j w'_k - w'_k \Gamma_{(kj)m} \nabla'_i w'_m - w'_m w'_k \Gamma_{(mi)l} \Gamma_{(kj)l}].$$

Приводя к единообразию немые индексы, получим выражения для компонент тензора деформаций черве компоненты перемещений w'_k в криволинейных ортогональных координатах

$$\varepsilon'_{ij} = \tfrac{1}{2}[\nabla'_j w'_i + \nabla'_i w'_j + w'_k (\Gamma_{(ki)j} + \Gamma_{(ki)j}) - (\nabla'_i w'_m)(\nabla'_j w'_m) -$$

$$- w'_k (\Gamma_{(ki)m} \nabla'_j w'_m + \Gamma_{(kj)m} \nabla'_i w'_m) - w'_k w'_m \Gamma_{(ki)l} \Gamma_{(mj)l}]. \qquad (3.5.12)$$

Аналогичными выкладками из (2.8.6) получим выражение для компонент тензора скорости деформации через компоненты скорости в криволинейных ортогональных координатах

$$\mathbf{e}'_{ij} = \tfrac{1}{2}[\nabla'_j v'_i + \nabla'_i v'_j + v'_k (\Gamma_{(ki)j} + \Gamma_{(kj)i})]. \qquad (3.5.13)$$

Выпишем также выражение для оператора Лапласа

$$\Delta\varphi \equiv \nabla \cdot \nabla\varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2},$$

но в криволинейных ортогональных координатах. Учитывая определение оператора "набла" в (3.5.5) а также (3.5.1) и (3.5.2) имеем

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = (\mathbf{e}'_k \nabla'_k (\mathbf{e}'_i \nabla'_i \varphi)) = (\mathbf{e}'_k \mathbf{e}'_i) \nabla'_k \nabla'_i \varphi + (\nabla'_i \varphi)(\mathbf{e}'_k \nabla'_k \mathbf{e}'_i) =$$

$$= \delta_{ki} \nabla'_k \nabla'_i \varphi + \Gamma_{(ik)l} (\mathbf{e}'_k \mathbf{e}'_i).$$

и окончательно получим

$$\Delta\varphi \equiv \nabla\cdot\nabla\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_k\partial\xi_k} + \Gamma_{(ik)k}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}. \qquad (3.5.14)$$

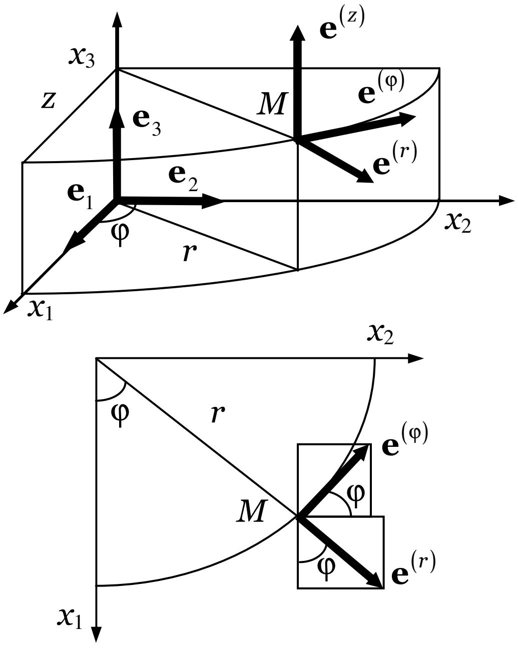


Рис. 3.5.1.

Цилиндрические координаты. Рассмотрим цилиндрические координаты r, φ, z (см. рис. 3.5.1), так что линейные координаты и базисные вектора $\mathbf{e}'_i$ имеют вид

$$\xi_1 \equiv r,\ \ \xi_2 \equiv r\,\varphi,\ \ \xi_3 \equiv z,$$

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}^{(r)},\ \ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}^{(\varphi)},\ \ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}^{(z)}. \qquad (3.5.15)$$

При этом имеет место

$$\mathbf{e}'_1 \equiv \mathbf{e}^{(r)} = (\cos\varphi)\,\mathbf{e}'_1 + (\sin\varphi)\,\mathbf{e}'_2,$$

$$\mathbf{e}'_2 \equiv \mathbf{e}^{(\varphi)} = -(\sin\varphi)\,\mathbf{e}'_1 + (\cos\varphi)\,\mathbf{e}'_2, \qquad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}^{(z)}\ \mathbf{e}_3. \qquad (3.5.16)$$

Откуда имеем

$$\frac{\partial\mathbf{e}'_1}{\partial\xi_1} = \frac{\partial\mathbf{e}^{(r)}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{e}'_1}{\partial\xi_2} = \frac{\partial\mathbf{e}^{(r)}}{\partial\varphi} = \frac{1}{r}((-\sin\varphi)\mathbf{e}_1 + (\cos\varphi)\mathbf{e}_2) = \frac{\mathbf{e}_2}{r}, \quad \frac{\partial\mathbf{e}'_1}{\partial\eta_3} = 0,$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}'_2}{\partial\xi_1} = \frac{\partial\mathbf{e}^{(\varphi)}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{e}'_2}{\partial\xi_2} = \frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{e}^{(\varphi)}}{\partial\varphi} = \frac{1}{r}((-\cos\varphi)\mathbf{e}_1 - (\sin\varphi)\mathbf{e}_2) = -\frac{\mathbf{e}_1}{r},$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}'_2}{\partial\eta_3} = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{e}'_3}{\partial\xi_1} = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{e}'_3}{\partial\xi_2} = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{e}'_3}{\partial\xi_3} = 0. \qquad (3.5.17)$$

Таким образом, для цилиндрической системы координат из всех 27 символов Кристофеля не равны нулю только два, а именно

$$\Gamma_{(12)2} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{(22)1} = \frac{1}{r} \qquad (3.5.18)$$

и для слагаемых, содержащих свертки с символами Кристофеля в уравнениях (3.5.11), получим

$$\upsilon'_m\,\Gamma_{(mk)k} = \upsilon'_1\,\Gamma_{(1k)k} + \upsilon'_2\,\Gamma_{(2k)k} + \upsilon'_3\,\Gamma_{(3k)k} = \upsilon'_1\,\Gamma_{(12)2} = \frac{\upsilon^{(r)}}{r};$$

$$j=1:\ \ v'_k\,v'_m\,\Gamma_{(mk)j}=v'_2\,v'_2\,\Gamma_{(22)1}=-\frac{(v^{(\varphi)})^2}{r},\quad \sigma'_{km}\,\Gamma_{(mk)j}=\sigma'_{22}\,\Gamma_{(22)1}=-\frac{\sigma^{(\varphi\varphi)}}{r};$$

$$j=2:\ \ v'_k\,v'_m\,\Gamma_{(mk)j}=v'_2\,v'_{(12)2}=\frac{v^{(\varphi)}}{r},\quad \sigma'_{km}\,\Gamma_{(mk)j}=\sigma'_{21}\,\Gamma_{(12)2}=\frac{\sigma^{(r\varphi)}}{r};$$

$$\sigma'_{jm}\,\Gamma_{(mk)k}=\Gamma_{(12)2}\,\sigma'_{j1}=\frac{\sigma'_{ji}}{r}. \tag{3.5.19}$$

Здесь верхние индексы r, φ, z в скобках у величин v и σ соответствуют соответственно 1, 2, 3 у v'_j и σ'_{kl}, т.е.

$$v^{(r)}\equiv v'_1,\quad v^{(\varphi)}\equiv v'_2,\quad v^{(z)}\equiv v'_3, \tag{3.5.20}$$

$$\sigma^{(rr)}\equiv\sigma'_{11},\ \sigma^{(r\varphi)}\equiv\sigma'_{12},\ \sigma^{(rz)}\equiv\sigma'_{13},\ \sigma^{(\varphi z)}\equiv\sigma'_{23},\ \sigma^{(\varphi\varphi)}\equiv\sigma'_{22},\ \sigma^{(zz)}\equiv\sigma'_{33},$$

и уравнения неразрывности и импульса (3.5.11) в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v^{(r)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\rho v^{(\varphi)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\rho v^{(z)}}{\partial z}+\frac{\rho v^{(r)}}{r}=0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial v^{(r)}}{\partial t}+v^{(r)}\frac{\partial v^{(r)}}{\partial r}+\frac{v^{(\varphi)}}{r}\frac{\partial v^{(r)}}{\partial\varphi}+v^{(z)}\frac{\partial v^{(r)}}{\partial z}-\frac{(v^{(\varphi)})^2}{r}\right)=$$

$$=\frac{\partial\sigma^{(rr)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma^{(r\varphi)}}{\partial\varphi}-\frac{\partial\sigma^{(rz)}}{\partial z}+\frac{\sigma^{(rr)}-\sigma^{(\varphi\varphi)}}{r}+\rho F^{(r)},$$

$$\rho\left(\frac{\partial v^{(\varphi)}}{\partial t}+v^{(r)}\frac{\partial v^{(\varphi)}}{\partial r}+\frac{v^{(\varphi)}}{r}\frac{\partial v^{(\varphi)}}{\partial\varphi}+v^{(z)}\frac{\partial v^{(\varphi)}}{\partial z}-\frac{v^{(\varphi)}v^{(r)}}{r}\right)= \tag{3.5.21}$$

$$=\frac{\partial\sigma^{(r\varphi)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma^{(\varphi\varphi)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\sigma^{(z\varphi)}}{r}+\frac{2\sigma^{(r\varphi)}}{r}+\rho F^{(\varphi)},$$

$$\rho\left(\frac{\partial v^{(z)}}{\partial t}+v^{(r)}\frac{\partial v^{(z)}}{\partial t}+\frac{v^{(\varphi)}}{r}\frac{\partial v^{(z)}}{\partial\varphi}+v^{(z)}\frac{\partial v^{(\varphi)}}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{\partial\sigma^{(rz)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma^{(\varphi z)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\sigma^{(zz)}}{\partial z}+\frac{\sigma^{(zz)}}{r}.$$

Нетрудно выписать и следующее из (3.5.12) и (3.5.13) с учетом (3.5.18) выражение для компонент тензора деформаций ($\varepsilon^{(rr)}$, $\varepsilon^{(r\varphi)}$, $\varepsilon^{(rz)}$, $\varepsilon^{(\varphi z)}$, $\varepsilon^{(\varphi\varphi)}$, $\varepsilon^{(zz)}$) через компоненты перемещения ($w^{(r)}$, $w^{(\varphi)}$, $w^{(z)}$) и компоненты тензора скорости деформаций ($e^{(rr)}$, $e^{(r\varphi)}$, $e^{(rz)}$, $e^{(\varphi z)}$, $e^{(\varphi\varphi)}$, $e^{(zz)}$) через компоненты скорости

$(v^{(r)}, v^{(\varphi)}, v^{(z)})$.

Выражение для оператора Лапласа (3.5.14) в цилиндрических координатах, учитывая (3.5.18), имеем вид

$$\Delta\Phi \equiv \nabla\cdot\nabla\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \qquad (3.5.22)$$

Для осесимметричного относительно оси (r = 0) движения, в которых все параметры не зависят от угловой координаты φ уравнения (3.5.21) и выражение (3.5.22) имеют более простой вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho v^{(r)}}{\partial r} + \frac{\rho v^{(r)}}{r} = 0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial v^{(r)}}{\partial t} + v^{(r)}\frac{\partial v^{(r)}}{\partial r} + v^{(z)}\frac{\partial v^{(r)}}{\partial z} - \frac{(v^{(\varphi)})^2}{r}\right) =$$

$$= \frac{\partial\sigma^{(rr)}}{\partial r} - \frac{\partial\sigma^{(rz)}}{\partial z} + \frac{\sigma^{(rr)} - \sigma^{(\varphi\varphi)}}{r} + \rho F^{(r)}, \qquad (3.5.21)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v^{(\varphi)}}{\partial t} + v^{(r)}\frac{\partial v^{(\varphi)}}{\partial r} + v^{(z)}\frac{\partial v^{(\varphi)}}{\partial z} - \frac{v^{(\varphi)}v^{(r)}}{r}\right) = \frac{\partial\sigma^{(r\varphi)}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma^{(z\varphi)}}{r} + \frac{2\sigma^{(r\varphi)}}{r} + \rho F^{(\varphi)},$$

$$\rho\left(\frac{\partial v^{(z)}}{\partial t} + v^{(r)}\frac{\partial v^{(z)}}{\partial t} + v^{(z)}\frac{\partial v^{(\varphi)}}{\partial z}\right) = \frac{\partial\sigma^{(rz)}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma^{(zz)}}{\partial z} + \frac{\sigma^{(zz)}}{r}.$$

$$\Delta\Phi \equiv \nabla\cdot\nabla\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

В классе таких осеимметричных движений выделяются одномерные чисто радиальные течения ($v^{(\varphi)} = v^{(z)} = 0,\ \ v^{(r)} = v,\ F^{(\varphi)} = F^{(\psi)} = 0$). В таких течениях из-за отсутствия вращения ($v^{(\varphi)} = 0$), отсутствия осевого течения ($v^{(z)} = 0$) и независимости всех функций от угловой коордтнаты φ и осевой координаты z условие симметрии приводит к отсутствию кастельных напряжений на цилиндрических поверхностях r = const: ($\sigma^{(r\varphi)} = \sigma^{(\varphi\, r)} = \sigma^{(rz)} = \ \sigma^{(zr)} = 0$). Такие движения являются одномерными, так как все параметры являются функцией только одной радиальной координаты r и времени t. Уравнения

(3.5.29) для такого одномерного сферически симметричного движения сплошной среды упрощаются:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v}{\partial r}+\frac{\rho v}{r}=0,$$

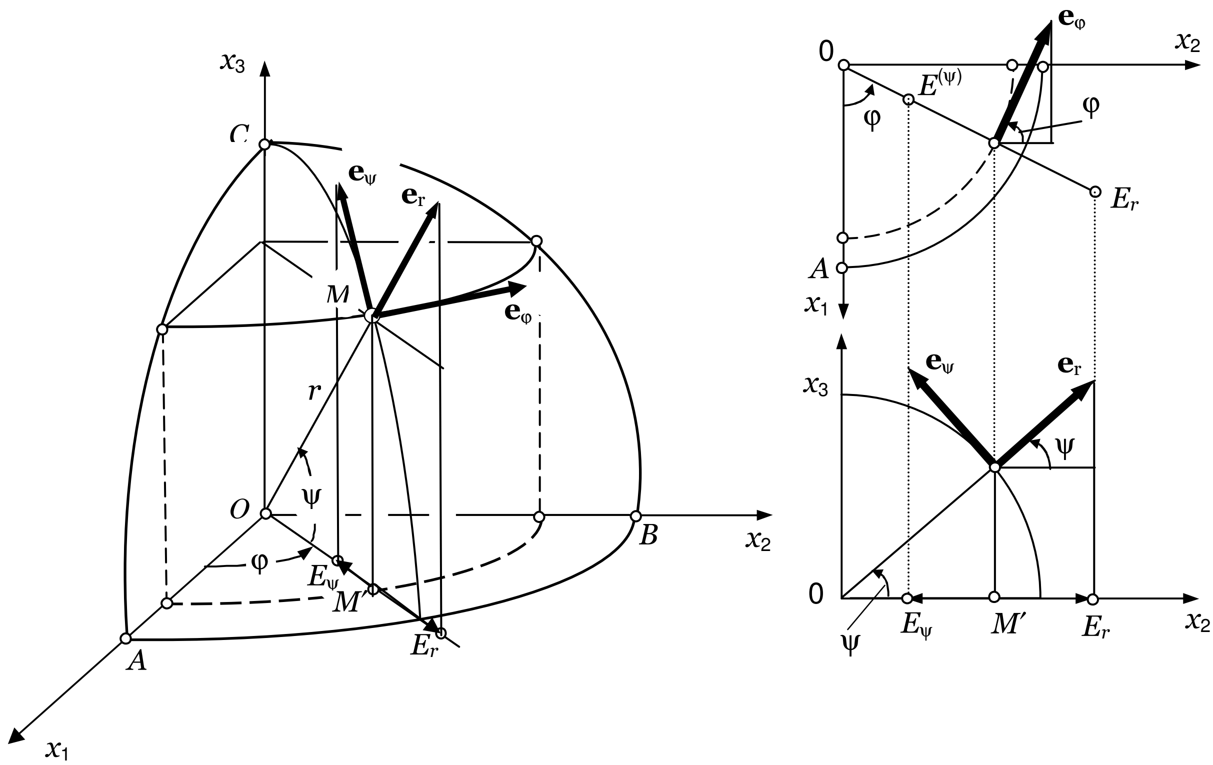
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{\partial\sigma^{(rr)}}{\partial r}+\frac{\sigma^{(rr)}-\sigma^{(\varphi\varphi)}}{r}+\rho F^{(r)}, \tag{3.5.21}$$

$$\Delta\Phi\equiv\nabla\cdot\nabla\Phi\equiv\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right).$$

Сферические координаты. Рассмотрим сферические координаты r, φ, ψ (см. рис. 3.5.2), так что и линейные координаты и базисные векторы $\mathbf{e}_i'$ имеет вид

$$\xi_1\equiv r,\quad \xi_2\equiv(r\cos\psi)\varphi,\quad \xi_3\equiv r\,\psi,$$

$$\mathbf{e}_1'\equiv\mathbf{e}^{(r)},\quad \mathbf{e}_2'\equiv\mathbf{e}^{(\varphi)},\quad \mathbf{e}_3'\equiv\mathbf{e}^{(\psi)}. \tag{3.5.23}$$



Выражение для этих векторов ортонормированного базиса через фиксированные вектора базиса декартовой прямоугольной системы координат имеют вид

$$\mathbf{e}'_1 \equiv \mathbf{e}^{(r)} = (\cos\psi\cdot\cos\varphi)\mathbf{e}_1 + (\cos\psi\cdot\sin\varphi)\mathbf{e}_2 + (\sin\psi)\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{e}'_2 \equiv \mathbf{e}^{(\varphi)} = -(\sin\varphi)\mathbf{e}_1 + (\cos\varphi)\mathbf{e}_2, \tag{3.5.24}$$

$$\mathbf{e}'_3 \equiv \mathbf{e}^{(\psi)} = -(\sin\psi\cdot\cos\varphi)\mathbf{e}_1 - (\sin\psi\cdot\sin\varphi)\mathbf{e}_2 + (\cos\psi)\mathbf{e}_3.$$

Из этих выражение после дифференцирования имеем

$$\frac{\partial\mathbf{e}'_1}{\partial\xi_1} = \frac{\partial\mathbf{e}^{(r)}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{e}'_1}{\partial\xi_2} = \frac{1}{r\cdot\cos\psi}\frac{\partial\mathbf{e}^{(r)}}{\partial\varphi} = \frac{-(\cos\psi\cdot\sin\varphi)\mathbf{e}_1 + (\cos\psi\cdot\cos\varphi)\mathbf{e}_2}{r\cdot\cos\psi} = \frac{\mathbf{e}_2}{r},$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}'_1}{\partial\xi_3} = \frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{e}^{(r)}}{\partial\psi} = \left[\frac{-(\sin\psi\cdot\cos\varphi)\mathbf{e}_1 - (\sin\psi\cdot\sin\varphi)\mathbf{e}_2 + (\cos\psi)\mathbf{e}_3}{r}\right] = \frac{\mathbf{e}_3}{r},$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}'_2}{\partial\xi_1} = \frac{\partial\mathbf{e}^{(\varphi)}}{\partial r} = 0, \tag{3.5.25}$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}'_2}{\partial\xi_2} = \frac{1}{r\cdot\cos\psi}\frac{\partial\mathbf{e}^{(\varphi)}}{\partial\varphi} = \frac{-(\cos\varphi)\mathbf{e}_1 - (\sin\varphi)\mathbf{e}_2}{r\cdot\cos\psi} = \frac{-(\cos\psi)\mathbf{e}'_1 + (\sin\psi)\mathbf{e}'_3}{r\cdot\cos\psi},$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}'_2}{\partial\xi_3} = \frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{e}^{(\varphi)}}{\partial\psi} = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{e}'_3}{\partial\xi_1} = \frac{\partial\mathbf{e}^{(\psi)}}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}'_1}{\partial\xi_2} = \frac{1}{r\cdot\cos\psi}\frac{\partial\mathbf{e}^{(\varphi)}}{\partial\varphi} = \frac{(\sin\psi\cdot\sin\varphi)\mathbf{e}_1 - (\sin\psi\cdot\cos\varphi)\mathbf{e}_2}{r\cdot\cos\psi} = -\frac{\sin\psi\cdot\mathbf{e}'_2}{r\cdot\cos\psi},$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}'_3}{\partial\xi_1} = \frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{e}^{(\psi)}}{\partial\psi} = \frac{-(\cos\psi\cdot\cos\varphi)\mathbf{e}_1 - (\cos\psi\cdot\sin\varphi)\mathbf{e}_2 - (\sin\psi)\mathbf{e}_3}{r} = -\frac{\mathbf{e}'_1}{r}.$$

Таким образом, из всех символов Кристофеля $\Gamma_{(mk)j} \equiv (\nabla'_k\,\mathbf{e}'_m)\,\mathbf{e}'_j$ не равны нулю следующие шесть

$$\Gamma_{(12)2} = \frac{1}{r},\ \Gamma_{(13)3} = \frac{1}{r},\ \Gamma_{(22)1} = \frac{1}{r},\ \Gamma_{(22)3} = \frac{\mathrm{tg}\psi}{r},\ \Gamma_{(32)2} = -\frac{\mathrm{tg}\psi}{r},\ \Gamma_{(33)1} = -\frac{1}{r}, \tag{3.5.26}$$

и для слагаемых, содержащих свертки с символами Кристофеля в уравнениях (3.5.11) и (3.5.14), получим

$$\Gamma_{(1k)k} = \Gamma_{(11)1} + \Gamma_{(12)2} + \Gamma_{(13)3} = \frac{2}{r}, \quad \Gamma_{(2k)k} = \Gamma_{(21)1} + \Gamma_{(22)2} + \Gamma_{(23)3} = 0,$$

$$\Gamma_{(3k)k} = \Gamma_{(31)1} + \Gamma_{(32)2} + \Gamma_{(33)3} = -\frac{\mathrm{tg}\psi}{r}$$

$$v'_m \Gamma_{(mk)k} = v'_1 \Gamma_{(1k)k} + v'_2 \Gamma_{(2k)k} + v'_3 \Gamma_{(3k)k} = v'_1 \frac{2}{r} - v'_3 \frac{\mathrm{tg}\psi}{r}$$

$$\sigma'_{jm} \Gamma_{(mk)k} = \sigma'_{j1} \Gamma_{(1k)k} + \sigma'_{j2} \Gamma_{(2k)k} + \sigma'_{j3} \Gamma_{(3k)k} = \frac{2\sigma'_{j1}}{r} - \frac{\sigma'_{j3}\mathrm{tg}\psi}{r} \qquad (3.5.27)$$

$$j = 1: \; v'_k v'_m \Gamma_{(mk)j} = v'_k v'_m \Gamma_{(mk)1} = v'_2 v'_2 \Gamma_{(22)1} + v'_3 v'_3 \Gamma_{(33)1} = \frac{(v^{(\varphi)})^2 + (v^{(\psi)})^2}{r},$$

$$\sigma'_{km} \Gamma_{(mk)j} = \sigma'_{km} \Gamma_{(mk)1} = \sigma'_{22} \Gamma_{(22)1} + \sigma'_{33} \Gamma_{(33)1} = -\frac{(\sigma^{(\varphi\varphi)}) + (\sigma^{(\psi\psi)})}{r},$$

$$j = 2: \; v'_k v'_m \Gamma_{(mk)j} = v'_k v'_m \Gamma_{(mk)2} = v'_2 v'_1 \Gamma_{(12)2} + v'_2 v'_3 \Gamma_{(32)2} =$$

$$\frac{v^{(r)} v^{(\varphi)} - v^{(\varphi)} v^{(\psi)}\mathrm{tg}\psi}{r},$$

$$\sigma'_{km} \Gamma_{(mk)j} = \sigma'_{km} \Gamma_{(mk)2} = \sigma'_{21} \Gamma_{(12)2} + \sigma'_{23} \Gamma_{(32)2} = \frac{\sigma^{(r\varphi)} - \sigma^{(\varphi\psi)}\mathrm{tg}\psi}{r},$$

$$j = 3: \; v'_k v'_m \Gamma_{(mk)j} = v'_k v'_m \Gamma_{(mk)3} = v'_2 v'_2 \Gamma_{(22)3} + v'_3 v'_1 \Gamma_{(31)3} =$$

$$\frac{(v^{(\varphi)})^2 \mathrm{tg}\psi + v^{(z)} v^{(\psi)}}{r},$$

$$\sigma'_{km} \Gamma_{(mk)j} = \sigma'_{km} \Gamma_{(mk)3} = \sigma'_{22} \Gamma_{(22)3} + \sigma'_{13} \Gamma_{(31)3} = \frac{\sigma^{(\varphi\varphi)}\mathrm{tg}\psi + \sigma^{(r\psi)}}{r}$$

Здесь верхние индексы r, φ, ψ в скобках у величин v и σ соответствует соответственно 1, 2, 3 у величин v'_j и σ'_{kl} т.е.

$$v^{(r)} \equiv v'_1, \quad v^{(\varphi)} \equiv v'_2, \quad v^{(\psi)} \equiv v'_3, \qquad (3.5.28)$$

$$\sigma^{(rr)} \equiv \sigma'_{11}, \; \sigma^{(r\varphi)} \equiv \sigma'_{12}, \; \sigma^{(r\psi)} \equiv \sigma'_{13}, \; \sigma^{(\varphi\varphi)} \equiv \sigma'_{22}, \; \sigma^{(\varphi\psi)} \equiv \sigma'_{23}, \; \sigma^{(\psi\psi)} \equiv \sigma'_{33},$$

и уравнениях неразрывности и импульса (3.5.11) в сферических координатах имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho v^{(r)}}{\partial r} + \frac{1}{r\cdot\cos\psi}\frac{\partial\rho v^{(\varphi)}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial\rho v^{(\psi)}}{\partial\psi} + \frac{2v^{(r)}}{r} - \frac{v^{(\psi)}\mathrm{tg}\psi}{r} = 0;$$

$$\rho\left(\frac{\partial v^{(r)}}{\partial t} + v^{(r)}\frac{\partial v^{(r)}}{\partial r} + \frac{v^{(\varphi)}}{r\cdot\cos\psi}\frac{\partial v^{(r)}}{\partial r} + \frac{v^{(\psi)}}{r}\frac{\partial v^{(r)}}{\partial\psi} - \frac{(v^{(\varphi)})^2 + (v^{(\psi)})^2}{r}\right) =$$

$$= \frac{\partial\sigma^{(rr)}}{\partial r} + \frac{1}{r\cdot\cos\psi}\frac{\partial\sigma^{(r\varphi)}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma^{(r\psi)}}{\partial\psi} - \frac{\sigma^{(\varphi\varphi)} + \sigma^{(\psi\psi)}}{r} + \frac{2\sigma^{(rr)}}{r} - \frac{\sigma^{(r\psi)}\mathrm{tg}\psi}{r} - \rho F^{(r)};$$

$$\rho\left(\frac{\partial \upsilon^{(\varphi)}}{\partial t}+\upsilon^{(r)}\frac{\partial \upsilon^{(\varphi)}}{\partial r}+\frac{\upsilon^{(\varphi)}}{r\cdot\cos\psi}\frac{\partial \upsilon^{(r)}}{\partial \varphi}+\frac{\upsilon^{(\psi)}}{r}\frac{\partial \upsilon^{(\varphi)}}{\partial \psi}+\frac{\upsilon^{(r)}\upsilon^{(\varphi)}-\upsilon^{(\varphi)}\upsilon^{(\psi)}\mathrm{tg}\psi}{r}\right)=$$

(3.5.29)

$$=\frac{\partial\sigma^{(r\varphi)}}{\partial r}+\frac{1}{r\cdot\cos\psi}\frac{\partial\sigma^{(\varphi\varphi)}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma^{(\varphi\psi)}}{\partial\psi}+\frac{\sigma^{(r\varphi)}-\sigma^{(\varphi\psi)}\mathrm{tg}\psi}{r}+\frac{2\sigma^{(\varphi r)}}{r}-\frac{\sigma^{(\varphi\psi)}\mathrm{tg}\psi}{r}+\rho F^{(\varphi)};$$

$$\rho\left(\frac{\partial \upsilon^{(\psi)}}{\partial t}+\upsilon^{(r)}\frac{\partial \upsilon^{(\psi)}}{\partial r}+\frac{\upsilon^{(\varphi)}}{r\cdot\cos\psi}\frac{\partial \upsilon^{(\psi)}}{\partial \varphi}+\frac{\upsilon^{(\psi)}}{r}\frac{\partial \upsilon^{(\psi)}}{\partial \psi}+\frac{(\upsilon^{(\varphi)})^2\mathrm{tg}\psi+\upsilon^{(r)}\upsilon^{(\psi)}}{r}\right)=$$

$$=\frac{\partial\sigma^{(r\psi)}}{\partial r}+\frac{1}{r\cdot\cos\psi}\frac{\partial\sigma^{(\varphi\psi)}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma^{(\psi\psi)}}{\partial\psi}+\frac{\sigma^{(\varphi\varphi)}\mathrm{tg}\psi+\sigma^{(r\psi)}}{r}+\frac{2\sigma^{(r\psi)}}{r}-\frac{\sigma^{(\psi\psi)}\mathrm{tg}\psi}{r}+\rho F^{(\psi)}$$

Выражение для оператора Лапласа (3.5.14) в сферических координатах, учитывая формулы (3.5.27) для $\Gamma_{(jk)k}$ имеет вид

$$\Delta\Phi\equiv\nabla\cdot\nabla\Phi\equiv\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\cos^2\psi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\psi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{\mathrm{tg}\psi}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\cos^2\psi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\psi\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right).\quad(3.5.30)$$

Выражение компонент тензора деформации ($\varepsilon^{(rr)}$, $\varepsilon^{(r\varphi)}$, $\varepsilon^{(\varphi\varphi)}$, $\varepsilon^{(\varphi\psi)}$, $\varepsilon^{(r\psi)}$, $\varepsilon^{(\psi\psi)}$) через компоненты перемещений ($w^{(r)}$, $w^{(\varphi)}$, $w^{(\psi)}$) и компоненты тензора скорости деформаций ($e^{(rr)}$, $e^{(r\varphi)}$, $e^{(r\psi)}$, $e^{(\varphi\varphi)}$, $e^{(\varphi\psi)}$, $e^{(\psi\psi)}$), через компоненты скорости ($\upsilon^{(r)}$, $\upsilon^{(\varphi)}$, $\upsilon^{(\psi)}$)следует из (3.5.12) и (3.5.13) с учетом (3.5.26).

Рассмотрим физический смысл слагаемых, входящих в проекции ускорения материальной точки (левые части уравнений импульса) на направления $\mathbf{e}^{(r)}$, $\mathbf{e}^{(\varphi)}$, $\mathbf{e}^{(\psi)}$, но не содержащих производные, т.е. слагаемые, вносящие вклад в ускорение даже если $\upsilon^{(r)}$, $\upsilon^{(\varphi)}$, $\upsilon^{(\psi)}$, постоянные по времени t и координатам r, φ и ψ.

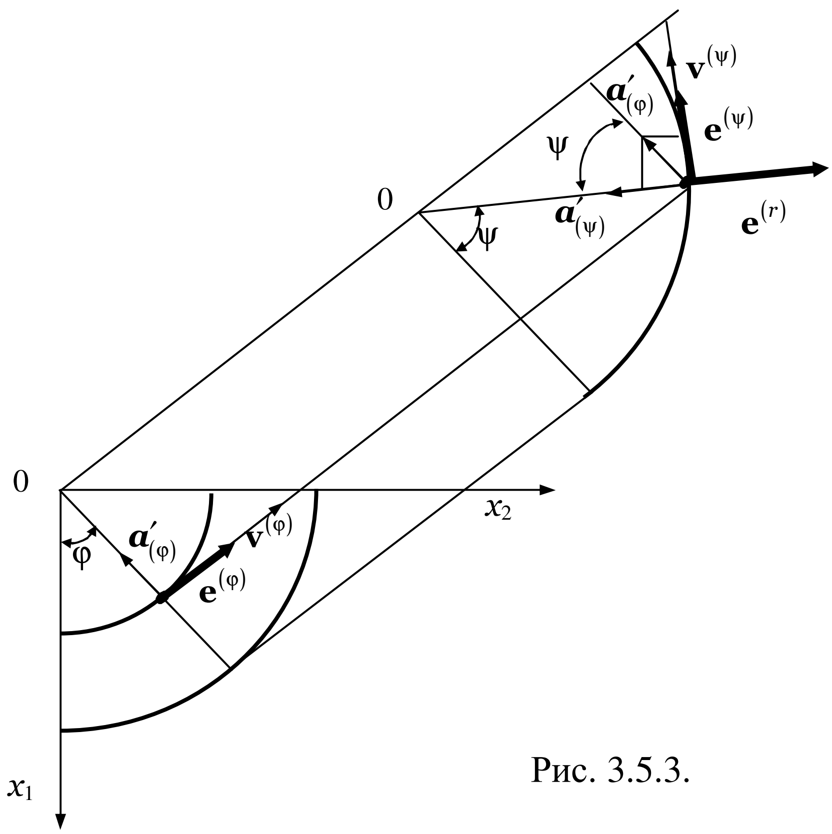


Рис. 3.5.3.

На рис. 3.5.3 показаны плоскость x_1x_2, а также плоскость, проходящая через $\mathbf{e}^{(r)}$ и $\mathbf{e}^{(\psi)}$ и рассматриваемую точку с координатами (r, φ, ψ). Если $\upsilon^{(r)} = 0$, то точка M движется по сфере r = const. Скорость $\mathbf{v}^{(\varphi)}$ создает центростремительное ускорение $\boldsymbol{a}'_{(\varphi)}$, направленное к оси x_3 и равное $(\upsilon^{(\varphi)})^2 / (r \cdot \cos\psi)$. Проекции этого ускорения на $\mathbf{e}^{(r)}$ и $\mathbf{e}^{(\psi)}$соответственно равны,

$$-\frac{(\upsilon^{(\varphi)})^2}{r\cdot\cos\psi}\cos\psi \equiv -\frac{(\upsilon^{(\varphi)})^2}{r}, \quad \frac{(\upsilon^{(\varphi)})^2}{r\cdot\cos\psi}\sin\psi = \frac{(\upsilon^{(\varphi)})^2 \operatorname{tg}\psi}{r},$$

что и объясняет физический смысл этих величин в первом и третьем уравнениях импульса. Аналогично центростремительное ускорение $\boldsymbol{a}'_{(\psi)}$, направленное против оси r, возникает из-за скорости $\mathbf{v}^{(\psi)}$. Это ускорение в проекции на ось r равно – $(\upsilon^{(\psi)})^2 / r$, что также означает физический смысл этого слагаемого в первом уравнениях импульса.

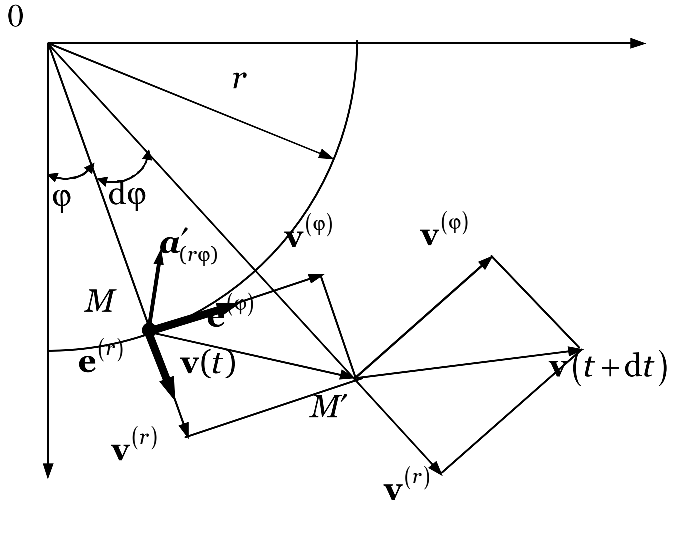


Рис. 3.5.4.

На рис. 3.5.4 показана плоскость, проходящая через $\mathbf{e}^{(r)}$ и $\mathbf{e}^{(\varphi)}$ рассматриваемой точке M. Для наглядности ограничимся случаем, когда $\upsilon^{(\psi)} = 0$. Тогда за счет $\upsilon^{(r)}$ материальная точка M

перейдет на больший радиус $r + \upsilon^{(r)}\mathrm{d}t$, а за счет $\upsilon^{(\varphi)}$ повернется вокруг оси x_3 на угол

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\upsilon^{(\varphi)}}{r\cos\psi}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}\varphi' = \frac{\upsilon^{(\varphi)}}{r}\mathrm{d}t.$$

Если $\upsilon^{(r)}$ и $\upsilon^{(\varphi)}$ постоянны во времени и по пространству, то в момент $t + \mathrm{d}t$ вектор скорости материальной точки M, переместившейся в положение M' (рис. 3.5.4), повернется, но не изменится по абсолютной величине.

Это свидетельствует о наличии ускорения $\boldsymbol{a}'_{(r\varphi)}$, перпендикулярного к вектору скорости и имеющего положительную проекцию на направление $\mathbf{e}^{(\varphi)}$. Причем указанные поворот вектора скорости и ускорение $\boldsymbol{a}'_{(r\varphi)}$ ненулевые, когда $\upsilon^{(r)}\upsilon^{(\varphi)} \neq 0$. Указанное ускорение $\boldsymbol{a}'_{(r\varphi)}$ качественно объясняет физический смысл слагаемого $\upsilon^{(r)}\upsilon^{(\varphi)}/r$ во втором (в проекции на $\mathbf{e}^{(\varphi)}$) уравнении импульса в сферических координатах и в выражении ускорения материальной точки.

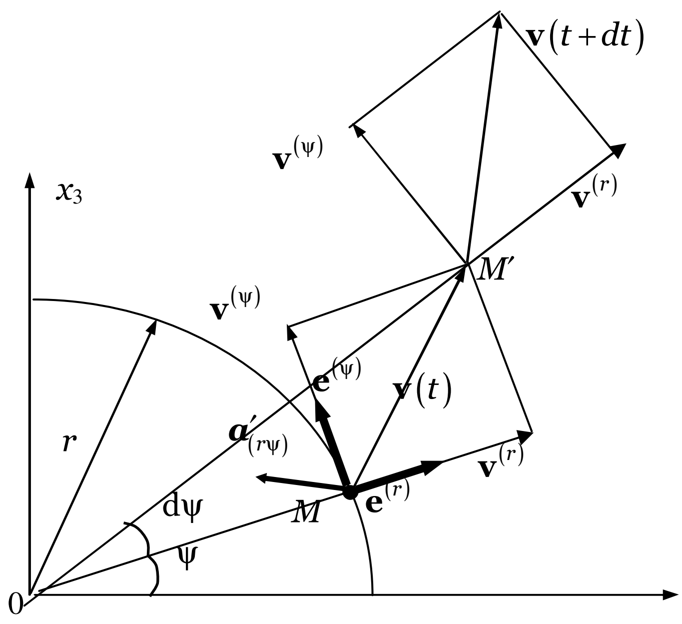


Рис. 3.5.5.

Аналогично рассматриваемая плоскость, проходящая через $\mathbf{e}^{(r)}$ и $\mathbf{e}^{(\psi)}$ в рассматриваемой точке M (см. рис. 3.5.5), можно качественно объяснить слагаемое $\upsilon^{(r)}\upsilon^{(\psi)}/r$ в третьем уравнении импульса как положительную при $\upsilon^{(r)}\upsilon^{(\psi)} >$ 0 проекцию ускорения $\boldsymbol{a}'_{(r\psi)}$ на $\mathbf{e}^{(\psi)}$.

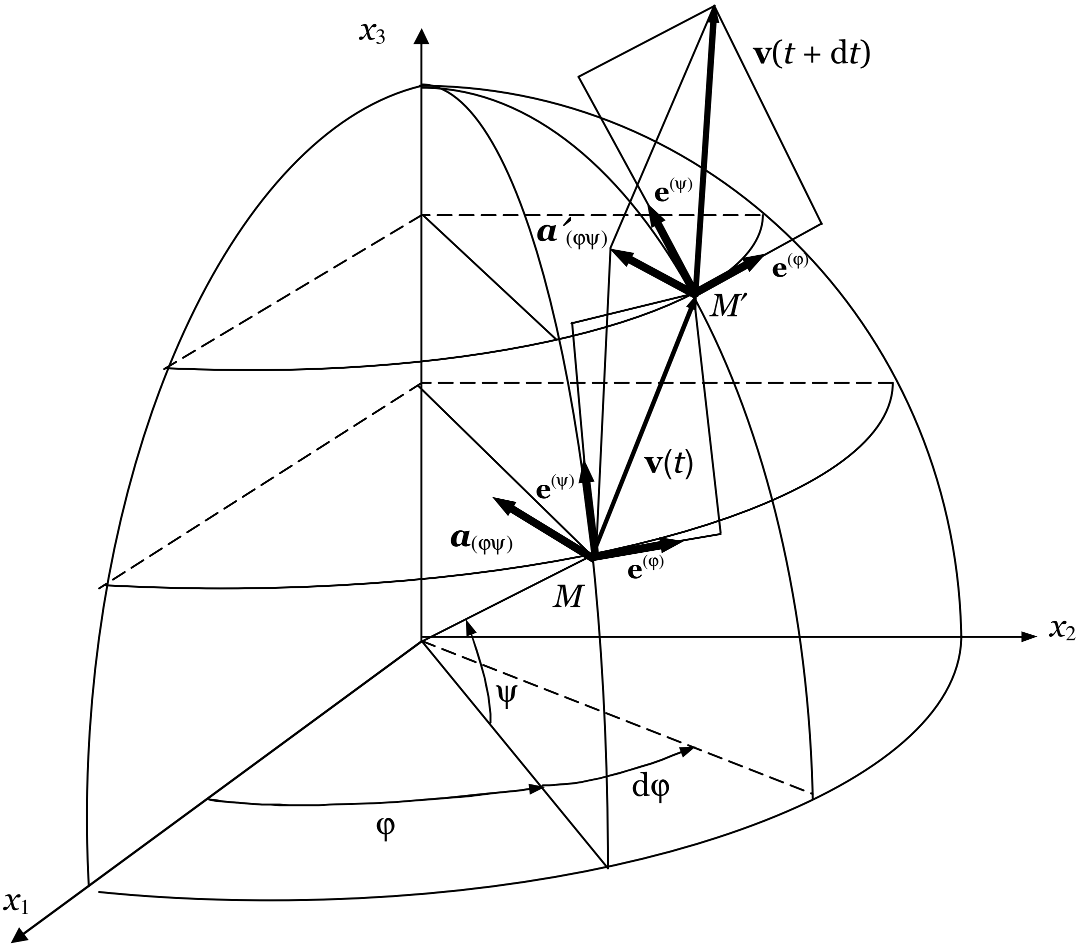


Рис. 3.5.6.

Для качественного объяснения слагаемого ($-\upsilon^{(\varphi)}\upsilon^{(\psi)}\mathrm{tg}\ \psi\ /\ r$) во втором уравнении импульса (в проекции на $\mathbf{e}^{(\varphi)}$) рассмотрим частный случай с $\upsilon^{(r)} = 0$ и постоянными во времени и в пространстве положительными $\upsilon^{(\varphi)}$ и $\upsilon^{(\psi)}$. Точка M в этом случае перемещается по сфере радиуса r (см. рис. 3.5.6) из точки с координатами φ, ψ в точку M' с координатами $\varphi + \mathrm{d}\varphi$, $\psi + \mathrm{d}\psi$:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\upsilon^{(\varphi)}}{r \cdot \cos\psi}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}\psi = \frac{\upsilon^{(\psi)}}{r}\mathrm{d}t.$$

Хотя скорость частицы по абсолютной величине не меняется, но из-за изменения направления $\mathbf{e}^{(\varphi)}$ и $\mathbf{e}^{(\psi)}$ в точке M' эта скорость изменяет направление, вращаясь вокруг оси, близкой к $\mathbf{e}^{(r)}$ в положительном направлении (против часовой стрелки). Указанное вращение и создаёт ускорение $\boldsymbol{a}'_{(\varphi\psi)}$, перпендикулярное скорости $\mathbf{v}$. Это ускорение имеет отрицательную проекцию на направление $\mathbf{e}^{(\varphi)}$ при $\upsilon^{(\varphi)} > 0$ и $\upsilon^{(\psi)} > 0$ отлично от нуля только при $\upsilon^{(\varphi)}\upsilon^{(\psi)} \neq 0$.

Во многих исследованиях выделяется класс радиальных ($\upsilon^{(\varphi)} = \upsilon^{(\psi)} = 0$, $\upsilon^{(r)} = \upsilon$, $F^{(\varphi)} = F^{(\psi)} = 0$), сферически симметричных ($\sigma^{(r\varphi)} = \sigma^{(r\psi)} = \sigma^{(\varphi\psi)} = 0$, $\sigma^{(\varphi\varphi)}$

$= \sigma^{(\psi\psi)}$) движений относительно начала координат (r = 0). Такие движения являются одномерными, так как все параметры являются функцией толко одной радиальной координаты r и времени t. Уравнения (3.5.29) для такого одномерного сферически симметричног движения сплошной среды упрощаются

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho v}{\partial r} + \frac{2v}{r} = 0;$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho v\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial\sigma^{(rr)}}{\partial r} - \frac{\sigma^{(\varphi\varphi)} + \sigma^{(\psi\psi)}}{r} + \frac{2\sigma^{(rr)}}{r} - \rho F^{(r)}. \tag{3.5.31}$$

Для таких одномерных сферически симметричных распределений $\Phi(r)$. Упрощается и выражение для оператора Лапласа (3.5.14) в сферических координатах с началом координат в центре симметрии

$$\Delta\Phi \equiv \nabla\cdot\nabla\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} \equiv \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right). \tag{3.5.32}$$