§ 7. Тензор деформации

Знать деформацию – значит, знать изменение длины всех материальных линий (“волокон”) и изменение углов между двумя любыми волокнами.

Рассмотрим декартову систему координат “наблюдателя” $Ox_1x_2x_3$ с базисными ортонормированными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и сопутствующую систему координат (лагранжеву сетку) ξ_1, ξ_2, ξ_3 в два момента времени: в момент $t = \hat{t}$

В момент $t = 0$ базисные вектора в каждой точке равны

$$\mathring{\mathbf{Э}}_i = \frac{\partial \mathring{\mathbf{r}}}{\partial \xi_i}, \tag{2.7.1}$$

а в момент $\hat{t}$ базисные вектора равны

$$\hat{\mathbf{Э}}_i = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \xi_i}. \tag{2.7.2}$$

Выделенный малый материальный отрезок (“волокно”), определяемый тройкой чисел $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$ в моменты $t = 0$ и $t = \hat{t}$ определяется следующими выражениями

$$d\mathring{\mathbf{r}} = d\xi_i\, \mathring{\mathbf{Э}}_i \quad (t = 0), \quad d\hat{\mathbf{r}} = d\xi_i\, \hat{\mathbf{Э}}_i. \tag{2.7.3}$$

Длины этого “волокна” $d\mathring{r}$ и $d\hat{r}$ в выделенные моменты времени определяются следующими выражениями:

$$(d\mathring{r})^2 = d\mathring{\mathbf{r}} \cdot d\mathring{\mathbf{r}} = d\xi_i\, \mathring{\mathbf{Э}}_i \cdot d\xi_j\, \mathring{\mathbf{Э}}_j = d\xi_i\, d\xi_j \left(\mathring{\mathbf{Э}}_i \cdot \mathring{\mathbf{Э}}_j\right) = d\xi_i\, d\xi_j\, \mathring{g}_{ij} \quad (t = 0),$$

$$(d\hat{r})^2 = d\hat{\mathbf{r}} \cdot d\hat{\mathbf{r}} = d\xi_i\, \hat{\mathbf{Э}}_i \cdot d\xi_j\, \hat{\mathbf{Э}}_j = d\xi_i\, d\xi_j \left(\hat{\mathbf{Э}}_i \cdot \hat{\mathbf{Э}}_j\right) = d\xi_i\, d\xi_j\, \hat{g}_{ij} \quad (t = \hat{t}), \tag{2.7.4}$$

$$\mathring{g}_{ij} = \mathring{\mathbf{Э}}_i \mathring{\mathbf{Э}}_j \quad (t = 0), \qquad \hat{g}_{ij} = \hat{\mathbf{Э}}_i \hat{\mathbf{Э}}_j \quad (t = \hat{t}),$$

где величины $\mathring{g}_{ij}$ и $\hat{g}_{ij}$ характеризуют базисные вектора соответственно в моменты времени $t = 0$ и $t = \hat{t}$.

Выражая скалярную величину $(dr)^2$ (это может быть $(d\mathring{r})^2$ или $(d\hat{r})^2$) в двух произвольных координатных системах: $\mathbf{Э}_1$, $\mathbf{Э}_2$, $\mathbf{Э}_3$ и $\mathbf{Э}'_1$, $\mathbf{Э}'_2$, $\mathbf{Э}'_3$, имеем

$$(\mathrm{d}r)^2 = \mathrm{d}\xi_i\, \mathrm{d}\xi_j\, g_{ij} = \mathrm{d}\xi'_k\ \mathrm{d}\xi'_l\, g'_{kl} \quad (g_{ij} = \mathbf{Э}_i \cdot \mathbf{Э}_j,\ g'_{kl} = \mathbf{Э}'_k\, \mathbf{Э}'_l). \quad (2.7.4а)$$

Таким образом имеется объект g_{ij}, характеризуемый 9 числами, вычисляемыми в любой системе координат $\mathbf{Э}_i \cdot (i = 1, 2, 3)$. Свертка этого объекта с двумя любыми (одинаковыми) тензорами (векторами) $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\xi_i \mathbf{Э}_i$ и $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\xi_j \mathbf{Э}_j$ является скаляром. Поэтому из теоремы деления (см. § 7 гл. 1) следует теорема.

Теорема. Скалярные произведения базисных векторов $\mathbf{Э}_i \cdot \mathbf{Э}_j = g_{ij}$ образуют тензор второго ранга $g_{ij}\mathbf{Э}_i\mathbf{Э}_j$, который называется *фундаментальным метрическим тензором*.

Введем величины, характеризующие изменение базисных волокон

$$\varepsilon_{ij} = 1/2\,(\hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij}). \quad (2.7.5)$$

Заметим, что при движении абсолютного твердого тела (углы между векторами $\mathbf{Э}_i$ и $\mathbf{Э}_j$ длины векторов $\mathbf{Э}_i$ не меняются) $\varepsilon_{ij} = 0$.

Так как $\hat{g}_{ij}$ и $\mathring{g}_{ij}$ – компоненты тензора, то ε_{ij} образуют компоненты тензора, который называется *тензором деформации*:

$$\mathbf{E} = \varepsilon_{ij}\, \hat{\mathbf{Э}}_i\, \hat{\mathbf{Э}}_j \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = \varepsilon_{ij}\, \mathring{\mathbf{Э}}_i\, \mathring{\mathbf{Э}}_j. \quad (2.7.5а)$$

Следует иметь в виду, что величины ε_{ij} для заданного закона движения зависят от выбора сопутствующей системы координат.

Вычисление компонент тензора деформаций по закону движения (перемещениями). Рассмотрим сначала движение, заданное в декартовой системе координат (см. § 3) в лагранжевых переменных:

$$x_i = x_i(\mathring{x}_1,\ \mathring{x}_2,\ \mathring{x}_3,\ t); \quad t = 0: \quad x_i = \mathring{x}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.7.6)$$

Это взаимно-однозначное соответствие $(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \Leftrightarrow (\mathring{x}_1,\ \mathring{x}_1,\ \mathring{x}_3)$, поэтому соотношения (2.6.7) можно разрешить относительно лагранжевых координат

$$\mathring{x}_k = \mathring{x}_k(x_1, x_2, x_3, t). \quad (2.7.7)$$

Причем $\mathring{x}_k = \mathring{x}_k(x_1, x_2, x_3, 0)$. Соотношения (2.7.7) позволяют установить местонахождение каждой материальной точки (частицы) в начальный момент времени ($t = 0$) по ее положению в текущий момент времени. Другими словами, по положению материальной точки в текущий момент времени можно восстановить ее “происхождение” (“паспортные данные”), определяемое ее положением в начальный момент времени.

Соотношения (2.7.6) позволяют ввести перемещения

$$w_k = x_k(\mathring{x}_1\,,\ \mathring{x}_2,\ \mathring{x}_3\,,\, t) - \mathring{x}_k \quad \text{или} \quad \mathbf{w} = \hat{\mathbf{r}} - \mathring{\mathbf{r}}\ . \qquad (2.7.8)$$

Пусть сопутствующая система координат такова, что она ортонормированная в начальный момент t *= 0 и в этот момент совпадает с декартовой системой координат наблюдателя, в которой задан закон движения (2.7.6):*

$$\mathring{\text{Э}}_i = \boldsymbol{e}_i,\quad \mathring{g}_{ij} = \boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}. \quad (2.7.9а)$$

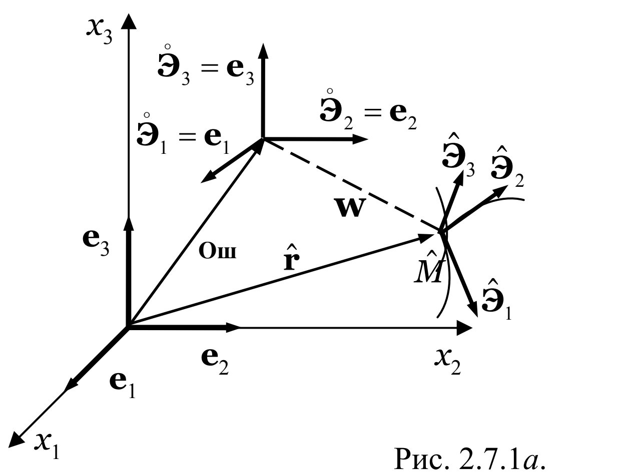

Рис. 2.7.1*а*.

При заданном законе движения в виде (2.7.6) базисные вектора сопутствующей системы координат в момент t = $\hat{t}$ *находятся по следующим формулам:*

$$\hat{\text{Э}}_i = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathring{x}_i}\right)_{\hat{t}} = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial x_k}\right)_{\hat{t}} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \mathring{x}_i}\right)_{\hat{t}} = \boldsymbol{e}_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial \mathring{x}_i}\right)_{\hat{t}}. \quad (2.7.10а)$$

Пусть сопутствующая система координат такова, что она ортонормированная в рассматриваемый момент t = $\hat{t}$ *и в этот момент совпадает с декартовой системой координат наблюдателя, в которой задан закон движения (2.7.7):*

$$\hat{\text{Э}}_i = \boldsymbol{e}_i,\quad \hat{g}_{ij} = \boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}. \quad (2.7.9\text{ б})$$

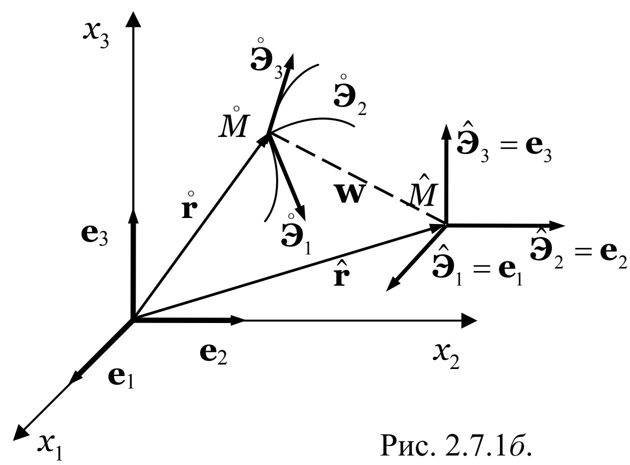

Рис. 2.7.1*б*.

При заданном законе движения в виде (2.7.7) базисные вектора сопутствующей системы координат в момент t *= 0 находятся по следующим формулам:*

$$\mathring{\text{Э}}_i = \left(\frac{\partial \mathring{\mathbf{r}}}{\partial x_i}\right)_{\hat{t}} = \frac{\partial \mathring{r}}{\partial \mathring{x}_k} \left(\frac{\partial \mathring{x}_k}{\partial x_i}\right)_{\hat{t}} = \boldsymbol{e}_k \left(\frac{\partial \mathring{x}_k}{\partial x_i}\right)_{\hat{t}}. \quad (2.7.10\text{ б})$$

Тогда имеем для $\hat{g}_{ij}$

$$\hat{g}_{ij} = \hat{\boldsymbol{\text{Э}}}_i\, \hat{\boldsymbol{\text{Э}}}_j = \frac{\partial x_k}{\partial \mathring{x}_i}\, \boldsymbol{e}_k\, \frac{\partial x_l}{\partial x_j}\, \boldsymbol{e}_l =$$

$$= \frac{\partial x_k}{\partial \mathring{x}_i}\, \frac{dx_l}{d\mathring{x}_j}\, \delta_{kl} = \frac{\partial x_k}{\partial \mathring{x}_i}\, \frac{\partial x_k}{\partial \mathring{x}_j}. \qquad (2.7.11а)$$

Для выбранной сопутствующей системы координат ($\mathring{\boldsymbol{\text{Э}}}_i = \boldsymbol{e}_i$*) величины* ε_{ij} *обозначим через* $\mathring{\varepsilon}_{ij}$*, которые равны*

$$\varepsilon_{ij} = \mathring{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial \mathring{x}_i}\frac{\partial x_k}{\partial \mathring{x}_j} - \delta_{ij}\right). \qquad (2.7.12а)$$

Теорема. *Величины* $\mathring{\varepsilon}_{ij}$ *образуют симметричный тензор второго ранга*

$$\varepsilon = \mathring{\varepsilon}_{ij}\, \boldsymbol{e}_i\, \boldsymbol{e}_j, \qquad (2.7.13а)$$

который называется лагранжевым тензором деформации *(или тензор деформации Грина).*

Доказательство:

а) $\mathring{\varepsilon}_{ij} = \mathring{\varepsilon}_{ji}$*, т.е. матрица – симметричная;*

б) Докажем, что при преобразовании систем координат наблюдателя ($\boldsymbol{e}_i \to \mathbf{e}'_k$*) компоненты* $\mathring{\varepsilon}_{ij}$ *преобразуются по формулам (1.4.1).*

В системе координат наблюдателя с базисными векторами $\mathbf{e}'_i$ *(i = 1, 2, 3)*

$$\mathring{\varepsilon}_{ij}{}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x'_k}{\partial \mathring{x}_i{}'}\frac{\partial x'_k}{\partial \mathring{x}_j{}'} - \delta'_{ij}\right).$$

Формулы преобразования координат

$$\mathbf{e}'_i = \alpha_{im}\, \boldsymbol{e}_m,\quad x'_k = \alpha_{km}\, x_m,\quad \mathring{x}_p = \alpha_{ip}\, \mathring{x}'_i.$$

Тогда

$$\frac{\partial x'_k}{\partial \mathring{x}_k{}'}\ \frac{\partial x'_k}{\partial \mathring{x}'_i} = \frac{\partial(\alpha_{km} x_m)}{\partial \mathring{x}_i{}'} = \alpha_{km}\frac{\partial x_m}{\partial \mathring{x}_i{}'} =$$

$$\alpha_{km}\, \frac{\partial x_m}{\partial \mathring{x}_p}\, \frac{\partial \mathring{x}_p}{\partial \mathring{x}_i{}'} = \alpha_{km}\, \alpha_{ip}\, \frac{\partial x_m}{\partial \mathring{x}_p}.$$

Подставляя в (2.7.14а) и учитывая, что

$$\delta'_{ij} = \delta_{ij},\quad \alpha_{km}\alpha_{kn} = \delta_{mn},$$

получим

$$\mathring{\varepsilon}_{ij}{}' = \frac{1}{2}\left(\alpha_{km}\alpha_{ip}\alpha_{kn}\alpha_{jq}\frac{\partial x_m}{\partial \mathring{x}_p}\ \frac{\partial x_n}{\partial \mathring{x}_q} - \delta_{ij}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\delta_{mn}\alpha_{ip}\alpha_{jq}\frac{\partial x_m}{\partial \mathring{x}_p}\ \frac{\partial x_n}{\partial \mathring{x}_q} - \delta_{ij}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_m}{\partial \mathring{x}_p}\ \frac{\partial x_n}{\partial \mathring{x}_q}\ \frac{\partial x_m}{\partial \mathring{x}_q} - \delta_{pq}\right)\alpha_{ip}\alpha_{jq}$$

Таким образом

Тогда имеем для $\mathring{g}_{ij}$

$$\mathring{g}_{ij} = \mathring{\boldsymbol{\text{Э}}}_i\, \mathring{\boldsymbol{\text{Э}}}_j = \frac{\partial \mathring{x}_k}{\partial x_i}\, \boldsymbol{e}_k\, \frac{\partial \mathring{x}_l}{\partial x_j}\, \boldsymbol{e}_l =$$

$$= \frac{\partial \mathring{x}_k}{\partial x_i}\, \frac{\partial \mathring{x}_l}{\partial x_j}\, \delta_{kl} = \frac{\partial \mathring{x}_k}{\partial x_i}\, \frac{\partial \mathring{x}_k}{\partial x_j}. \qquad (2.7.11\ б)$$

Для выбранной сопутствующей системы координат ($\hat{\boldsymbol{\text{Э}}}_i = \boldsymbol{e}_i$*) величины* ε_{ij} *обозначим через* $\hat{\varepsilon}_{ij}$*, которые равны*

$$\varepsilon_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial \mathring{x}_k}{\partial x_i}\frac{\partial \mathring{x}_k}{\partial x_j}\right). \qquad (2.7.12\ б)$$

Теорема: *Величины* $\hat{\varepsilon}_{ij}$ *образуют симметричный тензор второго ранга*

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon}_{ij}\, \boldsymbol{e}_i\, \boldsymbol{e}_j, \qquad (2.7.13\ б)$$

который называется эйлеровым тензором деформации *(или тензором деформации Альманси).*

Доказательство:

а) $\hat{\varepsilon}_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ji}$*;*

б) Аналогично $\mathring{\varepsilon}_{ij}$ *показывается*

$$\hat{\varepsilon}'_{ij} = \hat{\varepsilon}_{pq}\, \alpha_{ip}\, \alpha_{jq}. \qquad (2.7.14\ б)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}{}_{ij}' = \varepsilon_{pq}\alpha_{ip}\alpha_{jq}, \quad (2.7.14а)$$

что и требовалось доказать.

Вычислим $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$ *через перемещения (2.7.8), заданные в виде*

$w_k = w_k(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3, t)$:

$$\frac{\partial x_k}{\partial \overset{\circ}{x}_i} = \frac{\partial\left(\overset{\circ}{x}_k + w_k\right)}{\partial \overset{\circ}{x}_i} = \delta_{ki} + \frac{\partial w_k}{\partial \overset{\circ}{x}_i}. \quad (2.7.15а)$$

Тогда

$$2\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \left(\delta_{ki} + \frac{\partial w_k}{\partial \overset{\circ}{x}_i}\right)\left(\delta_{kj} + \frac{\partial w_k}{\partial \overset{\circ}{x}_j}\right) - \delta_{ij} =$$

$$= \delta_{ki}\delta_{kj} + \delta_{kj}\frac{\partial w_k}{\partial \overset{\circ}{x}_i} + \delta_{kj}\frac{\partial w_k}{\partial \overset{\circ}{x}_j} +$$

$$+ \frac{\partial w_k}{\partial \overset{\circ}{x}_i}\frac{\partial w_k}{\partial \overset{\circ}{x}_j} - \delta_{ij}.$$

В результате получим

$$2\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial w_j}{\partial \overset{\circ}{x}_i} + \frac{\partial w_i}{\partial \overset{\circ}{x}_j} + \frac{\partial w_k}{\partial \overset{\circ}{x}_i}\frac{\partial w_k}{\partial \overset{\circ}{x}_j}. \quad (2.7.16а)$$

Вычислим $\hat{\varepsilon}_{ij}$ *через перемещения (2.7.8), заданные в виде*

$w_k = w_k(x_1, x_2, x_3, t)$:

$$\frac{\partial \overset{\circ}{x}_k}{\partial x_i} = \frac{\partial\left(x_k - w_k\right)}{\partial x_i} = \delta_{kj} - \frac{\partial w_k}{\partial x_j}. \quad (2.7.15б)$$

Аналогично можно получить

$$2\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_k}{\partial x_i}\frac{\partial w_k}{\partial x_j}. \quad (2.7.16б)$$

Для малых деформаций: $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} << 1$, $\hat{\varepsilon}_{ij} << 1$, в частности, когда перемещения мало отличаются от поступательного перемещения тела:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(M)} + \delta\mathbf{w}(x_1, x_2, x_3, t),$$

где $\mathbf{w}^{(M)}$ – вектор перемещения точки М, $\delta\mathbf{w}$ – вектор перемещения всех материальных точек относительно точки

$$\frac{\partial w_j}{\partial \overset{\circ}{x}_i} << 1, \qquad \frac{\partial w_j}{\partial x_i} << 1,$$

имеет место более простое линейное уравнение для компонент тензора деформаций через пространственные производные от компонент вектора перемещения

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_j}{\partial \overset{\circ}{x}_i} + \frac{\partial w_i}{\partial \overset{\circ}{x}_j}\right). (2.7.17а) \qquad \hat{\varepsilon}_{ij} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right). \quad (2.7.17б)$$

Покажем, что $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$ и $\hat{\varepsilon}_{ij}$ в общем случае для заданного закона движения различны. Рассмотрим одномерное движение.

$$x_1 = f(\overset{\circ}{x}_1, t), \qquad x_2 = \overset{\circ}{x}_2, \qquad x_3 = \overset{\circ}{x}_3. \qquad (2.7.18)$$

Для этого закона

$$\frac{\partial x_2}{\partial \overset{\circ}{x}_1} = \frac{\partial x_2}{\partial \overset{\circ}{x}_3} = \frac{\partial x_3}{\partial \overset{\circ}{x}_1} = \frac{\partial x_3}{\partial \overset{\circ}{x}_2} = 0, \qquad \frac{\partial \overset{\circ}{x}_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \overset{\circ}{x}_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \overset{\circ}{x}_3}{\partial x_1} = \frac{\partial \overset{\circ}{x}_3}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \overset{\circ}{x}_2} = \frac{\partial x_3}{\partial \overset{\circ}{x}_3} = \frac{\partial \overset{\circ}{x}_2}{\partial x_2} = \frac{\partial \overset{\circ}{x}_3}{\partial x_3} = 1.$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{12} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{21} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{13} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{31} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{23} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{32} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = 0,$$

Покажем, что $\hat{\varepsilon}_{11} \neq \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}$. Действительно

$$2\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial \overset{\circ}{x}_1}\frac{\partial x_1}{\partial \overset{\circ}{x}_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \overset{\circ}{x}_1}\frac{\partial x_2}{\partial \overset{\circ}{x}_1} + \frac{\partial x_3}{\partial \overset{\circ}{x}_1}\frac{\partial x_3}{\partial \overset{\circ}{x}_1} - 1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \overset{\circ}{x}_1}\right)^2_{\overset{\circ}{x}_2,\overset{\circ}{x}_3} - 1 = y^2 - 1,$$

$$2\,\hat{\varepsilon}_{11} = 1 - \left(\frac{\partial \overset{\circ}{x}_1}{\partial x_1}\frac{\partial \overset{\circ}{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{\circ}{x}_2}{\partial x_1}\frac{\partial \overset{\circ}{x}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{\circ}{x}_3}{\partial x_1}\frac{\partial \overset{\circ}{x}_3}{\partial x_1}\right) = 1 - \left(\frac{\partial \overset{\circ}{x}_1}{\partial x_1}\right)^2_{x_2,x_3} = 1 - \frac{1}{y^2}$$

$$(x_2 = \overset{\circ}{x}_2,\ x_3 = \overset{\circ}{x}_3), \tag{2.7.19}$$

$$y \equiv \left(\frac{\partial x_1}{\partial \overset{\circ}{x}_1}\right)_{\overset{\circ}{x}_2,\overset{\circ}{x}_3} \equiv \frac{1}{\left(\partial \overset{\circ}{x}_1 / \partial x_1\right)_{\overset{\circ}{x}_2,\overset{\circ}{x}_3}}.$$

Чтобы $\hat{\varepsilon}_{11} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}$, необходимо

$$y^2 - 1 = 1 - \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^4 - 2y^2 + 1 = 0 \Rightarrow (y^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow y = \pm 1.$$

Т.е. для одномерного движения $\hat{\varepsilon}_{11} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}$, только если $y = \pm 1$, что соответствует $\partial x_1/\partial \overset{\circ}{x}_1 = \pm 1$ или $x_1 = \pm\overset{\circ}{x}_1 + \text{const}$, т.е. в случаях, когда отсутствует деформация. В тех же случаях, когда имеется деформация (одномерное сжатие: $\left|\partial x_1/\partial \overset{\circ}{x}_1\right| < 1$ или одномерное растяжение: $\left|\partial x_1/\partial \overset{\circ}{x}_1\right| > 1$), имеем $\hat{\varepsilon}_{11} \neq \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}$.

Случай $x_1 = \overset{\circ}{x}_1 + \text{const}$, $x_2 = \overset{\circ}{x}_2$, $x_3 = \overset{\circ}{x}_3$ соответствует поступательному перемещению тела вдоль оси x_1.

Случай $x_1 = -\overset{\circ}{x}_1 + \text{const}$, $x_2 = \overset{\circ}{x}_2$, $x_3 = \overset{\circ}{x}_3$ соответствует зеркальному отображению тела относительно плоскости Ox_2x_3 и поступательному перемещению вдоль оси x_1.

А теперь рассмотрим компоненты тензора деформации через вектор перемещения не в декартовой, а в криволинейной сопутствующей системе координат. Продифференцируем уравнение $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{r}} - \mathring{\mathbf{r}}$ по координатам сопутствующей системы (лагранжевым координатам) с учетом (2.7.1) и (2.7.2)

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \mathring{\mathbf{r}}}{\partial \xi_i} = \hat{\mathbf{Э}}_i - \mathring{\mathbf{Э}}_i, \tag{2.7.20}$$

откуда имеем

$$\hat{\mathbf{Э}}_i = \mathring{\mathbf{Э}}_i + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_i}, \qquad \mathring{\mathbf{Э}}_i = \hat{\mathbf{Э}}_i - \frac{\partial \mathring{\mathbf{w}}}{\partial \xi_i},$$

$$\hat{g}_{ij} = \hat{\mathbf{Э}}_i \hat{\mathbf{Э}}_j = \mathring{\mathbf{Э}}_i \mathring{\mathbf{Э}}_j + \mathring{\mathbf{Э}}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_j} + \mathring{\mathbf{Э}}_j \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_j},$$

$$\mathring{g}_{ij} = \mathring{\mathbf{Э}}_i \mathring{\mathbf{Э}}_j = \hat{\mathbf{Э}}_i \hat{\mathbf{Э}}_j - \hat{\mathbf{Э}}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_j} - \hat{\mathbf{Э}}_j \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_i}. \tag{2.7.21}$$

В результате выражение для компонент тензора деформации (2.7.5) имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\mathring{\mathbf{Э}}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_j} + \mathring{\mathbf{Э}}_j \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_j}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\hat{\mathbf{Э}}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_j} + \hat{\mathbf{Э}}_j \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_j}\right]. \tag{2.7.22}$$

Здесь производные вектора перемещения w по координатам также как и в (2.7.17 а,б) характеризуют относительные перемещения материальных точек сплошной среды. Учитывая, что базисные вектора зависят от координат производные вектора перемещений представляются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(w_k \mathring{\mathbf{Э}}_k\right) = \frac{\partial w_k}{\partial \xi_i} \mathring{\mathbf{Э}}_k + w_k \frac{\partial \mathring{\mathbf{Э}}_k}{\partial \xi_i}.$$

Полагая, что производная $\partial \mathring{\mathbf{Э}}_k / \partial$

Следует иметь в виду, что при дифференцировании вектора перемещения $\mathbf{w}$, представленного в виде разложения по проекциям на базисные вектора

$$\mathbf{w} = w_k \mathbf{Э}_k,$$

следует учитывать зависимость от ξ_1, ξ_2, ξ_3 не только самих проекций, но и базисных векторов $\mathbf{Э}_1$, $\mathbf{Э}_2$, $\mathbf{Э}_3$:

$$\hat{\mathbf{Э}}_k = \hat{\mathbf{Э}}_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad \mathring{\mathbf{Э}}_k = \mathring{\mathbf{Э}}_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \hat{\mathbf{Э}}_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)$$

и тогда

Условия совместности распределения деформаций. Величины ε_{ij} (их шесть независимых чисел: ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$, $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$ в точке могут быть произвольными, и они определяются набором девяти величин $\partial w_k/\partial x_i$ или $\partial r_k/\partial x_i$.

Но если компоненты ε_{ij} заданы в явном виде как функции координат. то шесть независимых уравнений (2.7.17а) или (2.7.17б) можно рассматривать как систему шести уравнений в частных производных для определения трех компонент перемещения $w_j(\mathbf{x}, t)$. Система переопределена и в общем случае не имеет решения при произвольных $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$. Таким образом, распределения шести функций $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$ определяются только тремя функциями $w_k(x_1, x_2, x_3, t)$ или $r_k(x_1, x_2, x_3, t)$. Поэтому шесть функций $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$ не могут быть произвольными, и они должны удовлетворять условиям совместности деформаций. Условия совместности для распределения шести функций ε_{ij} по пространству в момент времени t отражают непрерывность, дифференцируемость и взаимную однозначность отображения $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(\mathring{\mathbf{r}}, t)$, в частности, отсутствие “щелей” между различными физическими объемами и отсутствие “наложения различных физических объемов друг на друга”. По существу условия совместности $\mathring{\varepsilon}_{ij}(\mathring{\mathbf{r}}, t)$ должны быть следствием независимости дифференцирования вектора $\mathbf{r}$ или $\mathbf{w}$ по пространственным координатам $\mathring{x}_1$, $\mathring{x}_2$, $\mathring{x}_3$ и являются условиями интегрируемости уравнений (2.7.12а) или (2.7.12б) для определения $\hat{\mathbf{r}}(\mathring{\mathbf{r}}, t)$ по заданным $\mathring{\varepsilon}_{ij}(\mathring{\mathbf{r}}, t)$.

Условия совместности деформаций по своему смыслу аналогичны условиям потенциальности поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, когда три функции $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ ($i = 1, 2, 3$) определяются только одной функцией $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ в виде $v_i = \partial\varphi/\partial x_i$. При этом условия потенциальности следуют из совпадения перекрестных производных для φ: $\partial v_1/\partial x_2 = \partial v_2/\partial x_1$ и т.д.

Геометрический смысл компонент тензора деформаций. Пусть длина базисного вектора $\mathbf{Э}_i$ равна $1 + \delta$ и угол между $\mathbf{Э}_i$ и $\mathbf{Э}_j$ равен $\frac{1}{2}\pi + \psi_{ij}$:

$$\left|\mathring{\mathbf{Э}}_i\right| = 1 + \mathring{\delta}_i, \quad \widehat{\mathring{\mathbf{Э}}_i\mathring{\mathbf{Э}}_j} = \tfrac{1}{2}\pi + \mathring{\psi}_{ij} \ (i \neq j),$$

$$\left|\hat{\mathbf{Э}}_i\right| = 1 + \hat{\delta}_i, \quad \widehat{\hat{\mathbf{Э}}_i\hat{\mathbf{Э}}_j} = \tfrac{1}{2}\pi + \hat{\psi}_{ij} \ (i \neq j).$$

В частности для ортонормированного базиса $\mathring{\mathbf{Э}}_i = e_i \ \mathring{e}_i$ имеем $\mathring{\delta}_i = 0$, $\mathring{\psi}_{ij} = 0$. Компоненты тензора деформаций $\mathring{\varepsilon}$ можно представить через $\hat{\delta}_i$ и $\hat{\psi}_{ij}$.

$$2\mathring{\varepsilon}_{11} = (1 + \hat{\delta}_1)(1 + \hat{\delta}_1) - 1 = (1 + \hat{\delta}_1)^2 - 1,$$

$$2\mathring{\varepsilon}_{12} = (1 + \hat{\delta}_1)(1 + \hat{\delta}_2)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \hat{\psi}_{ij}\right) - 1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{2} = -(1 + \hat{\delta}_1)(1 + \hat{\delta}_2)\sin\hat{\psi}_{ij}.$$

Отсюда имеем

$$\hat{\delta}_1 = \sqrt{1 + 2\mathring{\varepsilon}_{11}} - 1 = \mathring{\varepsilon}_{11} + o(\mathring{\varepsilon}_{11}),$$

$$\sin\hat{\psi}_{12} = -\frac{2\mathring{\varepsilon}_{11}}{(1 + \hat{\delta}_1)(1 + \hat{\delta}_2)} \Rightarrow \hat{\psi}_{12} = -2\mathring{\varepsilon}_{12} + o(\mathring{\varepsilon}_{12}). \qquad (2.7.23)$$

Аналогичные формулы легко получить и для $\hat{\delta}_2$, $\hat{\delta}_3$, $\hat{\psi}_{23}$, $\hat{\psi}_{13}$. Таким образом, диагональные компоненты тензора деформации ε_{11}, ε_{22}, ε_{33} характеризуют удлинения $\hat{\delta}_1$, $\hat{\delta}_2$, $\hat{\delta}_3$ соответствующих базисных волокон, а компоненты с перекрестными индексами ε_{12}, ε_{23}, и ε_{13} характеризуют изменения углов между соответствующими базисными волокнами.

Тензора деформации $\mathring{\varepsilon}$ и $\hat{\varepsilon}$ – симметричные тензоры второго ранга. Поэтому для любых деформаций в окрестности материальной точки всегда можно найти ортогональную декартову систему координат $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$, определяющую систему главных осей тензора, в которой ε_{ij} имеет диагональный вид. Что означает, что волокна в окрестности рассматриваемой точки, направленные вдоль главных осей $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$, удлиняются или укорачиваются, но остаются ортогональными, т.е. не происходит изменения углов между ними ($\overset{\circ}{\psi}_{12} = \hat{\psi}_{12} = \overset{\circ}{\psi}_{23} = \hat{\psi}_{23} = \overset{\circ}{\psi}_{13} = \hat{\psi}_{13} = 0$), т.е. три взаимно-ортогональных волокна вдоль $\mathbf{Э}_i^*$ ($i = 1, 2, 3$). Тензоры $\overset{\circ}{\varepsilon}$ и $\hat{\varepsilon}$ определяются в виде

$$\overset{\circ}{\varepsilon} = \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{11}^{*}\, \mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_1^* + \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{22}^{*}\, \mathbf{e}_2^* \mathbf{e}_2^* + \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33}^{*}\, \mathbf{e}_3^* \mathbf{e}_3^*,$$

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_{11}^{*}\, \mathbf{e}_2^* \mathbf{e}_2^* + \hat{\varepsilon}_{22}^{*}\, \mathbf{e}_2^* \mathbf{e}_2^* + \hat{\varepsilon}_{33}^{*}\, \mathbf{e}_3^* \mathbf{e}_3^*. \qquad (2.7.24)$$

Преобразование бесконечно-малой деформируемой частицы. В соответствии с (2.7.3) выделим в момент $t = 0$ материальный отрезок (“волокно”) $\mathrm{d}\overset{\circ}{\mathbf{r}}$, проходящий через точку $\overset{\circ}{M}$ (см. рис. 2.7.1a), и который в сопутствующей системе координат, совпадающей с декартовой ($\overset{\circ}{\mathbf{Э}}_i = \mathbf{e}_i$), представляется в виде:

$$\mathrm{d}\overset{\circ}{\mathbf{r}} = \mathrm{d}\overset{\circ}{x}_i\, \mathbf{e}_i, \qquad (2.7.25)$$

а в момент $t = \hat{t}$ (когда материальная точка $\overset{\circ}{M}$ переходит в т. $\hat{M}$) он занимает положение $\mathrm{d}\hat{\mathbf{r}}$. В сопутствующей системе координат, определяемой базисными векторами-волокнами $\hat{\mathbf{Э}}_i$, в которые перешли базисные волокна $\overset{\circ}{\mathbf{Э}}_i = \mathbf{e}_i$, отрезок $\mathrm{d}\mathbf{r}$ в соответствие с (2.7.3) представляется через те же те же лагранжевы координаты:

$$\mathrm{d}\hat{\mathbf{r}} = \mathrm{d}\overset{\circ}{x}_i\, \hat{\mathbf{Э}}_i \quad (\overset{\circ}{M} \to \hat{M}, \;\; \overset{\circ}{\mathbf{Э}}_i \to \hat{\mathbf{Э}}_i, \;\; \mathrm{d}\overset{\circ}{\mathbf{r}} \to \mathrm{d}\hat{\mathbf{r}}). \qquad (2.7.26)$$

При этом в соответствии с (2.7.10а) и (2.7.16а) базисные волокна $\hat{\mathbf{Э}}_i$ представляются в виде разложения по векторам декартового базиса

$$\hat{\mathbf{Э}}_i = c_{ki}\mathbf{e}_k, \quad c_{ki} = \frac{\partial x_k}{\partial \overset{\circ}{x}_i} = \delta_{ki} + \frac{\partial w_k}{\partial \overset{\circ}{x}_i}. \qquad (2.7.27)$$

Наряду с (2.7.26) вектор $\mathrm{d}\hat{\mathbf{r}}$ может также быть представлен в виде разложения по векторам декартового базиса

$$\mathrm{d}\overset{\circ}{x}_i\, \hat{\mathbf{Э}}_i = \mathrm{d}\hat{x}_k\, \mathbf{e}_k = \mathrm{d}\hat{\mathbf{r}}. \qquad (2.7.28)$$

Умножая скалярно на $\mathbf{e}_l$, получим

$$\mathrm{d}\hat{x}_k\, \mathbf{e}_k\, \mathbf{e}_l = \mathrm{d}\overset{\circ}{x}_i\, \hat{\mathbf{Э}}_i\, \mathbf{e}_l.$$

Учитывая, что

$$\mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = \delta_{kl}, \quad \hat{\mathbf{Э}}_i \mathbf{e}_l = c_{ki} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = c_{ki} \delta_{kl} = c_{li}, \tag{2.7.29}$$

получим

$$\mathrm{d}\hat{x}_l = c_{li}\, \mathrm{d}\overset{\circ}{x}_i, \tag{2.7.30}$$

что определяет аффинное (линейное) преобразование координат произвольного бесконечно малого волокна в окрестности фиксированной точки M. При этом матрица этого преобразования (c_{ki}) фиксирована для всех волокон рассматриваемой бесконечно-малой частицы вокруг точки M.

В аналитической геометрии доказаны следующие свойства аффинного (линейного) преобразования:

1. Плоскость переходит в плоскость. Прямая линия – в прямую линию (при этом сохраняется параллельность плоскостей и прямых).

2. Линии и поверхности 2-го порядка переходят в линии и поверхности 2-го порядка, в частности, эллипсоид (в том числе сфера) переходит в эллипсоид.

3. Относительное удлинение (укорочение) отрезков $\hat{l}/\overset{\circ}{l}$ не зависит от длины исходного отрезка $\overset{\circ}{l}$ и зависит только от его направления; изменение объема $\hat{V}/\overset{\circ}{V}$ фиксировано для любого выделенного объема $\overset{\circ}{V}$ и не зависит от его формы и величины $\overset{\circ}{V}$.

Применительно к рассматриваемому преобразованию деформируемой бесконечно малой частицы; вокруг фиксированной материальной точки эти три свойства аффинного преобразования можно сформулировать следующим образом:

1. Частицы, при $t = 0$, лежащие на малом прямолинейном отрезке, переходят на малый прямолинейный отрезок и после деформации, т.е. сохраняется прямолинейность малых прямых волокон.

Частицы, при $t = 0$, лежащие на малом плоском элементе, переходят на малый плоский элемент и после деформации.

Частицы, до деформации лежащие на параллельных прямых и плоскостях, после деформации переходят на параллельные прямые и плоскости. Малый параллелепипед переходит в малый параллелепипед.

2. Частицы, лежащие в малом эллипсоиде или сфере, переходят в малый эллипсоид.

3. Удлинение малых прямых отрезков волокон $\mathrm{d}\hat{r}/\mathrm{d}\mathring{r}$ не зависит от длины отрезка $\mathrm{d}\mathring{r}$ до деформации, а зависит только от его направления. Относительное изменение объема $\mathrm{d}\hat{V}/\mathrm{d}\mathring{V}$ из-за деформаций не зависит от формы и величины исходного объема $\mathrm{d}\mathring{V}$ выделенной частицы при $t = 0$, которая при $t = \hat{t}$ имеет объем $\mathrm{d}\hat{V}$.

Выражение тензора деформации через матрицу аффинного преобразования. Исходя из определения (2.7.5) для компонент лагранжева тензора деформаций $\mathring{\varepsilon}_{ij}$ (когда $\mathring{\mathbf{Э}}_i = \mathbf{e}_i$), имеем, учитывая (2.7.27)

$$2\mathring{\varepsilon}_{ij} = \hat{\mathbf{Э}}_i \hat{\mathbf{Э}}_j - \delta_{ij} = c_{ki}\mathbf{e}_k \cdot c_{lj}\mathbf{e}_l - \delta_{ij} = c_{ki}\, c_{lj}\, \delta_{kl} - \delta_{ij} = c_{ki}\, c_{kj} - \delta_{ij}. \qquad (2.7.31)$$

Используя транспортированную матрицу $c_{ik}^{(\mathrm{T})} = c_{ki}$, получим

$$2\mathring{\varepsilon}_{ij} = c_{ik}^{(\mathrm{T})} c_{kj} - \delta_{ij}, \qquad (2.7.32)$$

что в матричном представлении имеет вид

$$2\mathring{\mathbf{E}} = \mathbf{C}^{(\mathrm{T})}\,\mathbf{C} - \mathbf{E}$$

$$(\mathring{\mathbf{E}} = (\varepsilon_{ij}),\ \mathbf{C}^{(\mathrm{T})} = (c_{ik}^{(\mathrm{T})}),\ \mathbf{C} = (c_{kj}),\ \mathbf{E} = (\delta_{ij})). \qquad (2.7.43)$$

Представление перемещения бесконечно малой деформируемой частицы. В соответствии с представлением (2.7.24) тензора деформаций в главных осях произвольное перемещение бесконечно малой деформируемой частицы может быть представлено как:

1. Поступательное перемещение, определяемое перемещением выделенной точки $\mathring{M} \to \hat{M}$;

2. Поворот частицы вместе с главными осями тензора деформации вокруг некоторой оси, проходившей через выделенную точку

$$(\overset{\circ}{\mathbf{e}}{}^*_i \to \hat{\mathbf{e}}^*_i = \hat{\mathbf{Э}}^*_i / \left|\hat{\mathbf{Э}}^*_i\right|);$$

3. Сжатие или растяжение вдоль трех главных осей тензора деформаций ($\hat{\mathbf{e}}^*_i \to \hat{\mathbf{Э}}^*_i$).

Если отсутствует деформация (т.е. отсутствует движение 3), то $\overset{\circ}{\mathrm{E}} = 0$ и $\mathrm{C}^{(\mathrm{T})}\mathrm{C} = \mathrm{E}$. Тогда $\mathrm{C}^{(\mathrm{T})} = \mathrm{C}^{-1}$, т.е. при отсутствии деформации С – ортонормированная матрица.

Движение 2 (поворот частицы) описывается вектором, определяемым тремя независимыми числами, движение 3 (сжатие или растяжение вдоль главных осей тензора деформации (“главных волокон”)) определяется шестью независимыми компонентами тензора деформации (три числа – направления этих трех “главных волокон” и три числа ($\overset{*}{\varepsilon}_{11}$, $\overset{*}{\varepsilon}_{22}$, $\overset{*}{\varepsilon}_{33}$) – величины их сжатия или удлинения). Получается девять независимых чисел, определяющих матрицу аффинного преобразования С, которое включает поворот и деформацию. Поступательное перемещение частицы (движение 1) описывается еще одним независимым вектором ($\mathbf{w}$), определяемым тремя независимыми числами. В итоге двенадцать чисел c_{ij}, w_k (i, j, k = 1, 2, 3) характеризуют перемещение малой деформируемой частицы.

Изменение объема бесконечно малой частицы ($\mathrm{d}\overset{\circ}{V} \to \mathrm{d}\hat{V}$) происходит только за счет деформации, сводящейся к изменению длин трех главных волокон. Относительное изменение объема $\mathrm{d}\hat{V}/\mathrm{d}\overset{\circ}{V}$ из-за аффинности преобразования (см. свойство 3) не зависит от формы и величины исходного объема $\mathrm{d}\overset{\circ}{V}$ выделенной малой частицы. Поэтому это изменение можно рассчитать на примере сферической частицы радиуса $\mathrm{d}\overset{\circ}{r}$, переходящей в эллипсоид (по свойству 2 аффинного преобразования) с тремя главными осями: $\mathrm{d}\hat{r}_1$, $\mathrm{d}\hat{r}_2$, $\mathrm{d}\hat{r}_3$, определяемыми диагональными элементами матрицы тензора деформации в главных осях

$$\mathrm{d}\hat{r}_1 = \mathrm{d}\overset{\circ}{r}\sqrt{1+2\overset{\circ}{\varepsilon}{}^*_{11}}, \quad \mathrm{d}\hat{r}_2 = \mathrm{d}\overset{\circ}{r}\sqrt{1+2\overset{\circ}{\varepsilon}{}^*_{22}}, \quad \mathrm{d}\hat{r}_3 = \mathrm{d}\overset{\circ}{r}\sqrt{1+2\overset{\circ}{\varepsilon}{}^*_{33}}.$$

Величины объемов выделенной частицы равны

$$\mathrm{d}\overset{\circ}{V} = \frac{4}{3}\pi(\mathrm{d}\overset{\circ}{r})^3, \quad \mathrm{d}\hat{V} = \frac{4}{3}\pi\,\mathrm{d}\mathbf{r}_1\,\mathrm{d}\mathbf{r}_2\,\mathrm{d}\mathbf{r}_3.$$

Откуда получим

$$\frac{\mathrm{d}\hat{V}}{\mathrm{d}\overset{\circ}{V}} = \sqrt{\left(1+2\overset{\circ}{\varepsilon}{}^*_{11}\right)\left(1+2\overset{\circ}{\varepsilon}{}^*_{22}\right)\left(1+2\overset{\circ}{\varepsilon}{}^*_{33}\right)} = 1 + \varepsilon^*_{11} + \varepsilon^*_{22} + \varepsilon^*_{33} + o(\overset{\circ}{\varepsilon}{}^*_{ii}) =$$

$$= 1 + \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + o(\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}) = 1 + \overset{\circ}{\varepsilon}_{ii} + o(\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}). \qquad (2.7.35)$$

Здесь учтено, что $\varepsilon_{ii} = \overset{*}{\varepsilon}_{ii}$ – инвариант тензора.

Задачи

1. Некоторый объем сплошной среды испытывает деформацию $x_1 = \overset{\circ}{x}_1$, $x_2 = \overset{\circ}{x}_2 + a\overset{\circ}{x}_3$, $x_3 = \overset{\circ}{x}_3 + \overset{\circ}{x}_2$, где a =const. Вычислить лагранжев тензор деформации Грина и эйлеров тензор деформации Альманси.

2. Дано поле перемещений $w_1 = ax_2$, $w_2 = ax_3$, $w_3 = ax_1$, где a = const. Вычислить лагранжевы и эйлеровы тензоры конечных и малых деформаций.

3. Для однородной деформации $x_1 = \sqrt{3}\,\overset{\circ}{x}_1$, $x_2 = 2\overset{\circ}{x}_2$, $x_3 = \sqrt{3}\,\overset{\circ}{x}_3 - \overset{\circ}{x}_2$ определить лагранжев тензор деформации и привести его к главным осям.

§ 8. Тензор скоростей деформаций

Рассмотрим тензоры деформации в два близких момента времени $t = \hat{t}$ и $t = t' = \hat{t} + \Delta t$:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}), \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}).$$

Приращение тензора деформаций за время от $\hat{t}$ до $\hat{t} + \Delta t$ характеризует деформацию за время Δt или деформацию, когда в качестве начального состояния взято состояние в момент $\hat{t}$:

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} - \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}'_{ij} - \hat{g}_{ij}). \qquad (2.8.1)$$

Определение. Введем субстанциональную скорость изменения тензора деформаций отсчитываемого каждый раз от текущего момента времени (t).

$$e_{ij} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\hat{g}_{ij}}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.8.2)$$

Величины e_{ij} образуют симметричный тензор 2-го ранга (субстанциональное дифференцирование по времени сохраняет для e_{ij} тензорный характер ε_{ij}):

$$\dot{\mathbf{E}} = e_{ij}\,\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j, \tag{2.8.3}$$

который называется тензором скоростей деформаций.

Компоненты тензора $\Delta\varepsilon_{ij}$ можно выразить в декартовой в момент времени $t = \hat{t}$ сопутствующей системе координат ($\overset{\circ}{x}_i = x_i$), которая в момент $t = t' = \hat{t} + \Delta t$ деформируется. Согласно (2.7.17а) компоненты тензор деформации $\Delta\varepsilon_{ij}$, определяющий деформацию между временами $t = \hat{t}$ и $t = t' = \hat{t} + \Delta t$ выражаются через компоненты вектора перемещений $\Delta\mathbf{w}(\mathbf{r}, t, \Delta t)$ за время Δt:

$$2\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Delta w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta w_k}{\partial x_i}\frac{\partial \Delta w_k}{\partial x_j}, \tag{2.8.4}$$

$$\Delta\mathbf{w}(\mathbf{r}, t, \Delta t) = \mathbf{v}(r, t)\,\Delta t + o(\Delta t).$$

Тогда для e_{ij} получим

$$2\,e_{ij} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\Delta t + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\Delta t^2 + o(\Delta t)\right],$$

откуда следует выражение, определяющее e_{ij} в декартовой системе координат

$$e_{ij} = e_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{2.8.5}$$

Это же выражение можно получить, использую субстанциональное дифференцирование по времени выражения (2.8.4). При этом следует иметь в виду, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \Delta w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}\,\Delta w_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\,\Delta w_k}{\partial x_i}\frac{\partial\,\Delta w_k}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial \Delta w_k}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \Delta w_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta w_k}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \Delta w_k}{\partial x_i} = 0.$$

Равенство нулю последней производной следует из того, что

$$\Delta\mathbf{w}(x_1, x_2, x_3, t, 0) = 0, \quad \frac{\partial\,\Delta w_k}{\partial x_j} = \frac{\partial\,\Delta w_k}{\partial x_i} = 0.$$

Поэтому получается выражение (2.8.5):

$$\frac{\mathrm{d}\,\Delta\varepsilon_{ij}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,\varepsilon_{ij}}{\mathrm{d}t} = e_{ij} = e_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

Аналогично из (2.7.22) получаются выражение для компонент тензора скоростей деформации в криволинейной сопутствующей системе координат

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\hat{\mathbf{Э}}_i \frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(v_k \hat{Э}_k\right) + \hat{\mathbf{Э}}_j \frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(v_k \hat{\mathbf{Э}}_k\right)\right], \quad \dot{\mathbf{E}} = e_{ij}\,\hat{\mathbf{Э}}_i\,\hat{\mathbf{Э}}_j. \qquad (2.8.6)$$

При этом, как и в (2.7.22) нужно иметь в виду, что хотя выбор системы координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 может быть и произвольным, но если эта система координат криволинейная, то вектора базиса зависят от координат точек пространства и времени:

$$\hat{\mathbf{Э}}_i = \hat{\mathbf{Э}}_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \hat{t}\,) \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (2.8.6а)$$

Тензор деформации ε_{ij} есть сравнительная характеристика состояний в два момента времени: $t = 0$ и $t = \hat{t}$.

Тензор скоростей деформаций e_{ij} есть характеристика состояния в один момент времени: $t = \hat{t}$.

Тензор e_{ij} определяет бесконечно-малое аффинное преобразование за счет деформации за время $\mathrm{d}t$. Это преобразование определяется величинами $\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = e_{ij}\,\mathrm{d}t$.

Уравнение совместности распределения компонент тензора скоростей деформации. Распределение по пространству девяти компонент тензора e_{ij} (i, j =1, 2, 3) определяется распределением трех компонент вектора скорости v_k (k =1, 2, 3). Поэтому также как и для тензора деформаций ε_{ij}, компоненты тензора скоростей деформаций e_{ij} должны удовлетворять условиям совместности деформаций. Учитывая, что имеется три условия симметрии тензора e_{ij} ($e_{12} = e_{21}$, $e_{13} = e_{31}$, $e_{23} = e_{32}$), на условия совместности деформаций приходится три независимых уравнения, следующих из (2.8.4). Исходя из

(2.8.5) можно показать, что должны выполняться следующие условия совместности:

$$A_{ijkl} = \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 e_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 e_{il}}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 e_{jk}}{\partial x_i \partial x_l} = 0. \qquad (2.8.7)$$

Распределение скоростей в бесконечно-малой деформируемой частице.

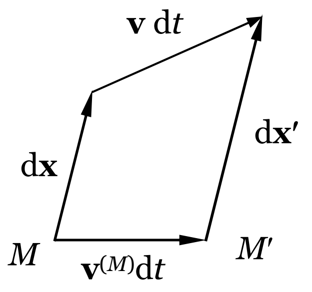

Рис. 2.8.1.

Пусть $\mathrm{d}\mathbf{x}$ произвольный малый радиус-вектор, исходящий из точки M:

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}x_i\, \mathbf{e}_i.$$

Разлагая функцию $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, дающую распределение скорости, в ряд Тейлора около точки M с точностью до величин второго порядка малости, получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(M)} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}\right)^{(M)} \mathrm{d}x_i + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i \partial x_k}\right)^{(\tilde{M})} \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_k.$$

Далее верхний индекс в скобках (M) относится к значениям соответствующих функций в точке M, а индекс ($\tilde{M}$) к значению второй производной в точке, находящейся близко к M: $\left|\mathrm{d}x_i^{(\tilde{M})}\right| \le \left|\mathrm{d}x_i^{(M)}\right|$.

Из (2.8.7) следует разложение для компонент вектора

$$\upsilon_k = \upsilon_k^{(M)} + \left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right)^{(M)} + \upsilon_0\, O(\left(\frac{\mathrm{d}x}{L}\right)^2) = \upsilon_k^{(M)} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right)^{(M)} - \left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}\right)^{(M)}\right\}\mathrm{d}x_i +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right)^{(M)} + \left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}\right)^{(M)}\right\}\mathrm{d}x_i + \upsilon_0\, O(\left(\frac{\mathrm{d}x}{L}\right)^2).$$

Используя компоненты тензора скоростей деформации $\mathbf{e}_{ki}$ (см. (2.8.4)) и компоненты антисимметричного тензора ω_{ki}

$$\omega_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}\right), \qquad (2.8.8)$$

получим

$$\upsilon_k = \upsilon_k^{(M)} + \omega_{ki}^{(M)}\,\mathrm{d}x_i + e_{ki}^{(M)}\,\mathrm{d}x_i + \upsilon_0\, O\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{L}\right)^2\right). \qquad (2.8.9)$$

Введем вектор $\boldsymbol{\omega}$, определяемый ротором поля скорости:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \equiv \frac{1}{2}[\nabla \times \mathbf{v}] \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{e}_i\,\nabla_j\upsilon_k. \qquad (2.8.10)$$

Для выяснения смысла величины $\boldsymbol{\omega}$ вычислим $\boldsymbol{\omega}$ для распределения скорости при бездеформационном движении, или при движении абсолютно твердого тела, когда

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^{(M)}(t) + [\boldsymbol{\Omega}(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(M)})], \qquad (2.8.11)$$

$$\text{или} \quad \upsilon_k(x_1, x_2, x_3, t) = \upsilon_k^{(M)} + \varepsilon_{klm}\,\Omega_l\,(x_m - x_m^{(M)}),$$

где $\mathbf{v}^{(M)}$ – скорость поступательного движения с точкой M, а $\boldsymbol{\Omega}$ – вектор угловой скорости, зависящий только от времени.

Покажем, что вектор $\boldsymbol{\omega}$, вычисленный по формуле (2.8.10) для бездеформационного движения (2.8.11), совпадает с угловой скоростью вращения $\boldsymbol{\Omega}$, исходя из (2.8.10), (2.8.11) с учетом формулы (1.9.17):

$$\boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{e}_i\,\nabla_j\upsilon_k = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\upsilon_k^{(M)} + \varepsilon_{klm}\,\Omega_l\,(x_m - x_m^{(M)})) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{e}_i\,\varepsilon_{klm}\,\Omega_l\,\frac{\partial\left(x_m - x_m^{(M)}\right)}{\partial x_j} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm}\,\mathbf{e}_i\,\Omega_l\,\delta_{mi} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klj}\,\mathbf{e}_i\,\Omega_l = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{jkl}\,\Omega_l\,\mathbf{e}_i = \tfrac{1}{2}2\delta_{il}\,\Omega_l\,\mathbf{e}_i = \Omega_l\,\mathbf{e}_i = \boldsymbol{\Omega}.$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{2}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ может рассматриваться как угловая скорость вращения материальной частицы.

Покажем, что второе слагаемое в правой части (2.8.9) может быть представлено в виде

$$\omega_{ki} = -\,\varepsilon_{lki}\,\omega_l \quad \text{или} \quad \omega_i = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ikm}\,\omega_{km}. \qquad (2.8.12)$$

Действительно, учитывая (2.8.10) для $\boldsymbol{\omega}$ и формулу (1.9.18) имеем

$$\varepsilon_{kil}\,\omega_l = \varepsilon_{kil}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon_{lmn}\,\Delta_m\,\upsilon_n = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{kil}\,\varepsilon_{lmn}\,\nabla_m\,\upsilon_n =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(\delta_{km}\,\delta_{in}\,\nabla_m\,\upsilon_n - \delta_{kn}\,\delta_{im}\,\nabla_m\,\upsilon_n) = \tfrac{1}{2}\,(\nabla_k\,\upsilon_i - \nabla_i\,\upsilon_k) = \omega_{ik} = -\omega_{ki},$$

$$\varepsilon_{ikm}\,\omega_{km} = \varepsilon_{ikm}(-\varepsilon_{lkm}\,\omega_l) = -\varepsilon_{ikm}\,\varepsilon_{lkm}\,\omega_l = -2\delta_{il}\,\omega_l = -2\omega_i.$$

Таким образом, выражение (2.8.9) с учетом (2.8.12) может быть представлено в виде

$$v_k = v_k^{(M)} + \varepsilon_{kli}\,\omega_l^{(M)}\mathrm{d}x_i + \mathbf{e}_{ki}^{(M)}\mathrm{d}x_i + v_0\,\mathrm{O}\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{L}\right)^2\right). \qquad (2.8.13)$$

или в векторном виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(M)} + [\boldsymbol{\omega}^{(M)} \times \mathrm{d}\mathbf{x}] + e_{ki}^{(M)}\mathrm{d}x_i\,\mathbf{e}_k + v_0\,\mathrm{O}\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{L}\right)^2\right). \qquad (2.8.14)$$

Теорема (Коши-Гельмгольца). Движение бесконечно-малой деформируемой частицы в линейном приближении по ее размеру может быть представлено в виде суммы трех движений:

1. Поступательное движение, определяемое вектором $\mathbf{v}^{(M)}$;
2. Вращательное движение, определяемое вектором $\boldsymbol{\omega}^{(M)}$;
3. Деформационное движение, определяемое тензором скоростей деформаций $e_{pq}^{(M)}$, т.е.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{пост}} + \mathbf{v}_{\text{вращ}} + \mathbf{v}_{\text{деф}} + v_0\,\mathrm{O}\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{L}\right)^2\right),$$

$$\mathbf{v}_{\text{пост}} = \mathbf{v}^{(M)}, \quad \mathbf{v}_{\text{вращ}} = [\boldsymbol{\omega}^{(M)} \times \mathrm{d}\mathbf{x}], \quad \mathbf{v}_{\text{деф}} = e_{ki}^{(M)}\mathrm{d}x_i\,\mathbf{e}_k \qquad (2.8.15)$$

$$(\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(M)},\ \mathrm{d}x_i = x_i - x_i^{(M)}).$$

Эта теорема обобщает теорему о представлении движения абсолютно твердого тела или бездеформационного движения в виде суммы поступательного и вращательного движений, определяемых двумя векторами $\mathbf{v}^{(M)}$ или $\boldsymbol{\omega}$, или их шестью компонентами. Движение малой ($\mathrm{d}x << L$) деформируемой частицы в линейном приближении (пренебрегая нелинейной величиной более высокого порядка малости $v_0\mathrm{O}((\mathrm{d}x/L)^2)$), помимо шести компонент векторов $\mathbf{v}^{(M)}$ и $\boldsymbol{\omega}^{(M)}$ определяется шестью независимыми компонентами симметрического тензора скоростей деформаций $e_{ij}^{(M)}$.

Формулы (2.8.13)–(2.8.15) по существу определяют дифференциал поля скорости по пространственным координатам

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}^{(M)} \times \mathrm{d}\mathbf{x}] + e_{ki}^{(M)}\mathrm{d}x_i\,\mathbf{e}_k$$

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^{(M)} + o(\mathrm{d}x), \quad \mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(M)}, \quad \mathrm{d}x_i = x_i - x_i^{(M)}, \tag{2.8.16}$$

где $\mathbf{x}^{(M)}$ – радиус-вектор точки M, а $x_i^{(M)}$ – координаты точки M.

Поступательное и деформационное движение являются потенциальными:

$$\mathbf{v}_{\text{пост}} = \mathbf{v}^{(M)} = \nabla\varphi_{\text{пост}}, \quad \varphi_{\text{пост}} = \upsilon_k^{(M)}(x_k - x_k^{(M)}) + \text{const},$$

$$\mathbf{v}_{\text{деф}} = e_{ki}^{(M)}(x_k - x_k^{(M)})\,\mathbf{e}_i = \nabla\varphi_{\text{деф}}, \tag{2.8.17}$$

$$\varphi_{\text{деф}} = \tfrac{1}{2}\, e_{ki}^{(M)}(x_k - x_k^{(M)})(x_i - x_i^{(M)}) + \text{const}.$$

Действительно,

$$\nabla[\upsilon_k^{(M)}(x_k - x_k^{(M)})] = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}[\upsilon_k^{(M)}(x_k - x_k^{(M)})]$$

$$= \mathbf{e}_i \upsilon_k^{(M)} \frac{\partial\left(x_k - x_k^{(M)}\right)}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \upsilon_k^{(M)} \delta_{ki} = \upsilon_k^{(M)}\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_{\text{пост}},$$

$$\nabla[\tfrac{1}{2}\, e_{ki}^{(M)}(x_k - x_k^{(M)})(x_i - x_i^{(M)})] = \tfrac{1}{2}\, e_{ki}^{(M)}\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}[(x_k - x_k^{(M)})(x_i - x_i^{(M)})] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, e_{ki}^{(M)}\mathbf{e}_l \left[\left(x_i - x_i^{(M)}\right)\frac{\partial\left(x_k - x_k^{(M)}\right)}{\partial x_l} + \left(x_k - x_k^{(M)}\right)\frac{\partial\left(x_i - x_i^{(M)}\right)}{\partial x_i}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, e_{ki}^{(M)}\mathbf{e}_l\,[(x_i - x_i^{(M)})\delta_{kl} + (x_k - x_k^{(M)})\delta_{kl}] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathbf{e}_l\,[e_{li}^{(M)}(x_i - x_i^{(M)}) + e_{kl}^{(M)}(x_k - x_k^{(M)})] =$$

$$= \mathbf{e}_l\, e_{li}^{(M)}(x_i - x_i^{(M)}) = e_{ki}^{(M)}(x_k - x_k^{(M)})\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_{\text{деф}}.$$

Заметим, что потенциалы $\varphi_{\text{пост}}$ и $\varphi_{\text{деф}}$ совпадают с тензорными функциями вектора $\mathbf{v}^{(M)} = \mathbf{v}_k^{(M)}\mathbf{e}_k$ тензора $\mathrm{E} = e_{ki}^{(M)}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_i$ (см. (1.10.1), (1.10.5)), если принять

$$z_k = x_k - x_k^{(M)} \tag{2.8.18}$$

т.е. отсчитывать координаты от точки M.

Таким образом, движение малой деформируемой частицы в линейном приближении может быть представлено в виде суммы потенциального (включающего поступательное и деформационное движение) и непотенциального (вращательного) движений

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + [\boldsymbol{\omega}^{(M)} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(M)})] + \upsilon_0 O((|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(M)}|/L)^2)) . \qquad (2.8.19)$$

Причем вращательное движение при $\boldsymbol{\omega}^{(M)}$ не может быть потенциальным, т.к. если $[\boldsymbol{\omega}^{(M)} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(M)})] = \nabla\varphi'$, то

$$\boldsymbol{\omega}^{(M)} = \tfrac{1}{2}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_{\text{вращ}} = \tfrac{1}{2}\mathrm{rot\,grad}\,\varphi' = 0 \qquad \text{(см. 2.5.6).}$$

Геометрический смысл компонент тензора скоростей деформаций. В соответствии с (2.7.23) имеем

$$\mathrm{d}\varepsilon_{11} = \mathrm{d}\delta_1, \quad \mathrm{d}\varepsilon_{22} = \mathrm{d}\delta_2, \mathrm{d}\varepsilon_{33} = \mathrm{d}\delta_3,$$

$$2\mathrm{d}\varepsilon_{12} = -\,\mathrm{d}\psi_{12}, \quad 2\mathrm{d}\varepsilon_{13} = -\,\mathrm{d}\psi_{13}, \quad 2\mathrm{d}\varepsilon_{23} = -\,\mathrm{d}\psi_{23}, \qquad (2.8.20)$$

где δ_i – относительное удлинение волокна вдоль $\mathbf{e}_i$ ($\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}\mathring{x}_i = 1 + \delta_i$), а ψ_{ij} – изменение углов между волокнами, направленными вдоль $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$ ($i \neq j$, i, j = 1, 2, 3) . Учитывая, что $e_{ij} = \mathrm{d}\varepsilon_{ij}/\mathrm{d}t$, получаем

$$e_{11} = \frac{\mathrm{d}\delta_1}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\delta}_1, \quad e_{22} = \frac{\mathrm{d}\delta_2}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\delta}_2, \quad e_{33} = \frac{\mathrm{d}\delta_3}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\delta}_3,$$

$$e_{12} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\psi_{12}}{\mathrm{d}t} \equiv -\frac{1}{2}\dot{\psi}_{12}, \quad e_{13} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\psi_{13}}{\mathrm{d}t} \equiv -\frac{1}{2}\dot{\psi}_{13}, \qquad (2.8.21)$$

$$e_{23} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\psi_{23}}{\mathrm{d}t} \equiv -\frac{1}{2}\dot{\psi}_{23}.$$

Т.е. компоненты тензора скоростей деформаций с одинаковыми индексами: e_{11}, e_{22}, e_{33} равны скорости относительного удлинения волокон, направленных соответственно вдоль $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, а компоненты с разными индексами e_{12}, e_{13}, e_{23} определяют скорость изменения углов между соответствующими координатными (базисными) волокнами.

Скорость удлинения $\dot{\delta}$ произвольного волокна малой длины $\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}x_i\,\mathbf{e}_i$, где $\mathrm{d}x_i/|\mathrm{d}\mathbf{x}| = \mu_i$ определяет направление этого волокна, получается из формул для компонент тензора второго ранга при преобразовании координат. Направим базисный вектор $\mathbf{e}'_1$ вдоль $\mathrm{d}\mathbf{x}$ ($\alpha_{1i} = \mathrm{d}x_i/\mathrm{d}x = \mu_i$). Тогда, учитывая зависимость $\dot{\delta}$ от направления единичного вектора $\boldsymbol{\mu} = \mu_i\,\mathbf{e}_i$, получим:

$$\dot{\delta}(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}x) = \mathring{\delta}' = \mathbf{e}'_{11} = e_{pq}\,\alpha_{1p}\,\alpha_{1q},$$

Отсюда следует, что скорость удлинения волокна в направлении единичного вектора $\boldsymbol{\mu} = \mu_i\,\mathbf{e}_i$ определяется тензорной функцией $F(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ тензора скоростей деформаций (см. (1.10.1)):

$$\dot{\delta}\,(\boldsymbol{\mu}) = e_{pq}\,\mu_p\,\mu_q. \qquad (2.8.22)$$

Этот же результат можно получить, исходя из равенства (см. рис. 2.8.1)

$$\mathrm{d}\mathbf{x}' = \mathrm{d}\mathbf{x} + \mathbf{v}\,\mathrm{d}t - \mathbf{v}^{(M)} + \mathrm{o}(\mathrm{d}t),$$

откуда следует

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\mathbf{x}) \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}' - \mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^{(M)}. \qquad (2.8.23)$$

Скорость относительного удлинения волокна $\mathrm{d}\mathbf{x}$ можно представать

$$\dot{\delta}\,(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}x) = \frac{1}{2(\mathrm{d}x)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}x)^2 = \frac{1}{2(\mathrm{d}x)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{(\mathrm{d}x)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\mathbf{x}).$$

С учетом (2.8.23) и (2.8.14) получим формулу (2.8.22)

$$\dot{\delta}\,(\boldsymbol{\mu}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{(\mathrm{d}x)^2}(\mathbf{v} - \mathbf{v}^{(M)}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{(\mathrm{d}x)^2}\left\{[\boldsymbol{\omega}^{(M)} \times \mathrm{d}\mathbf{x}] + \mathbf{e}_{ki}^{(M)}\mathrm{d}x_i\,\mathbf{e}_k\right\} =$$

$$= \frac{1}{(\mathrm{d}x)^2}\left\{\mathrm{d}\mathbf{x}[\boldsymbol{\omega}^{(M)} \times \mathrm{d}\mathbf{x}] + \mathbf{e}_{ki}^{(M)}\,\mathrm{d}x_i\,\mathbf{e}_k\cdot\mathrm{d}x_m\,\mathbf{e}_m\right\} = \frac{\mathbf{e}_{ki}^{(M)}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_m\delta_{ki}}{(\mathrm{d}x)^2} =$$

$$= \mathbf{e}_{ki}^{(M)}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}x} = \mathbf{e}_{ki}^{(M)}\mu_k\mu_i.$$

Так как $\dot{\mathbf{E}} = e_{ij}\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ – симметричный тензор 2-го ранга, то существует взаимно-ортогональная тройка базисных векторов $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$ (совпадающих с главными направлениями этого тензора), в которой матричное представление этого тензора имеет диагональный вид

$$\dot{\mathbf{E}} \Rightarrow (e_{ij}) = \begin{pmatrix} e_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & e_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & e_{33}^* \end{pmatrix}.$$

Вдоль главных направлений за время $\mathrm{d}t$ происходит удлинение или укорочение волокон, а изменение прямых углов между “главными волокнами” не происходит.

Рассмотрим сферическую частицу радиуса $\mathrm{d}r$. За время $\mathrm{d}t$ она превращается в эллипсоидальную с главными осями вдоль $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$. Длины этих главных полуосей станут равными

$$\mathrm{d}r_1 = \mathrm{d}r(1 + e_{11}^*\,\mathrm{d}t), \quad \mathrm{d}r_2 = \mathrm{d}r(1 + e_{22}^*\,\mathrm{d}t), \quad \mathrm{d}r_3 = \mathrm{d}r(1 + e_{33}^*\,\mathrm{d}t).$$

Относительное изменение объема выделенной частицы будет равно

$$\frac{1}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}V) = -\frac{{}^4\!/_3\,\pi(\mathrm{d}r_1\mathrm{d}r_2\mathrm{d}r_3 - (\mathrm{d}r)^3)}{{}^4\!/_3\,\pi(\mathrm{d}r)^3} = e_{11}^* + e_{22}^* + e_{33}^* \equiv e_{ii}^*. \quad (2.8.24)$$

Так как e_{ii} – инвариант тензора Е, т.е. e_{ii} не меняется при преобразовании координат ($e_{ii} = e'_{ii} = e_{ii}^*$), то учитывая выражение (2.8.4) для e_{ii} через υ_k, получим

$$\frac{1}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}V) = e_{ii} = \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3} \equiv \nabla_i \upsilon_i \equiv \operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v}. \quad (2.8.25)$$

Задачи

1. Задано поле скоростей в эйлеровых переменных $\upsilon_1 = a(t)\,x_2$. Определить тензор скоростей деформации.

2. Для движения $x_1 = \mathring{x}_1$, $x_2 = \mathring{x}_2 + \mathring{x}_1(\mathbf{e}^{-2t} - 1)$, $x_3 = \mathring{x}_3 + \mathring{x}_1(\mathbf{e}^{-3t} - 1)$ вычислить тензор скоростей деформации и вектор угловой скорости.

3. Задано поле скорости $\upsilon_1 = kx_2$, $\upsilon_2 = kx_1$, $\upsilon_2 = 0$ (k = const) – чистый сдвиг. Найти тензор скоростей деформаций, вектор угловой скорости, вектор перемещения, тензор деформации изменение объема $\Delta V/\Delta V_0$.

§ 9. Уравнение сохранения массы (неразрывности)

Как известно, отношение объемов материальной малой частицы вокруг точки M при ее движении определяется якобианом преобразования $\Delta^{(x\mathring{x})}$ (см.(2.3.9))

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\mathring{V}} = \Delta^{(x\mathring{x})}. \quad (2.9.1)$$

Это уравнение можно доказать с помощью следующих рассуждений. Выделим при $t = 0$ материальную частицу в виде параллелепипеда с величиной в точке M со сторонами вдоль базисных волокон $\mathring{\mathbf{Э}}_1$, $\mathring{\mathbf{Э}}_2$, $\mathring{\mathbf{Э}}_3$. Длины сторон вдоль этих волокон возьмем малыми и равным так что параллелепипед будет построен на векторах $d\xi_1 \overset{\circ}{\mathbf{Э}}_1$, $d\xi_2 \overset{\circ}{\mathbf{Э}}_2$, $d\xi_3 \overset{\circ}{\mathbf{Э}}_3$..

Учитывая, что согласно(2.5.13)

$$\overset{\circ}{\mathbf{Э}}_i = \frac{\left(d\overset{\circ}{x}_k\right)}{d\xi_i} \mathbf{e}_k, \tag{2.9.2}$$

получим, что объем параллелепипеда равный смешанному произведению векторов $d\xi_1 \overset{\circ}{\mathbf{Э}}_1$, $d\xi_2 \overset{\circ}{\mathbf{Э}}_2$, $d\xi_3 \overset{\circ}{\mathbf{Э}}_3$ выражается в виде определителя

$$d\overset{\circ}{V} = \begin{vmatrix} d\xi_1 \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_1}{\partial \xi_1} & d\xi_1 \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_2}{\partial \xi_1} & d\xi_1 \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_3}{\partial \xi_1} \\ d\xi_2 \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_1}{\partial \xi_2} & d\xi_2 \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_2}{\partial \xi_2} & d\xi_2 \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_3}{\partial \xi_2} \\ d\xi_3 \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_1}{\partial \xi_3} & d\xi_3 \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_2}{\partial \xi_3} & d\xi_3 \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix},$$

что можно представить через якобиан

$$d\overset{\circ}{V} = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \, \Delta^{(\overset{\circ}{x}\,\xi)}, \qquad \Delta^{(\overset{\circ}{x}\,\xi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_2}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_3}{\partial \xi_1} \\ \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_1}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_2}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_3}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_1}{\partial \xi_3} & \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_2}{\partial \xi_3} & \dfrac{\partial \overset{\circ}{x}_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}. \tag{2.9.3}$$

При этом

$$\Delta^{(\overset{\circ}{x}\xi)} = \frac{1}{\Delta^{(\xi\overset{\circ}{x})}}, \tag{2.9.4}$$

где $\Delta^{(\xi\overset{\circ}{x})}$ соответствует обратному преобразованию (2.3.2) и определен в (2.3.3).

В момент времени $t = \hat{t}$ выделенный параллелепипед будет иметь стороны $d\xi_1 \hat{\mathbf{Э}}_1$, $d\xi_2 \hat{\mathbf{Э}}_2$, $d\xi_3 \hat{\mathbf{Э}}_3$. Поэтому его объем dV будет равен смешанному произведению последних трех векторов, которое выражается в виде определителя (см. (2.9.3)).

$$
\mathrm{d}\hat{V} = \begin{vmatrix} \mathrm{d}\xi_1 \dfrac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_1} & \mathrm{d}\xi_1 \dfrac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_1} & \mathrm{d}\xi_1 \dfrac{\partial \hat{x}_3}{\partial \xi_1} \\ \mathrm{d}\xi_2 \dfrac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_2} & \mathrm{d}\xi_2 \dfrac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_2} & \mathrm{d}\xi_2 \dfrac{\partial \hat{x}_3}{\partial \xi_2} \\ \mathrm{d}\xi_3 \dfrac{\partial \hat{x}_1}{\partial \xi_3} & \mathrm{d}\xi_3 \dfrac{\partial \hat{x}_2}{\partial \xi_3} & \mathrm{d}\xi_3 \dfrac{\partial \hat{x}_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} = \mathrm{d}\xi_1 d\xi_2 \mathrm{d}\xi_3 \, \Delta^{(x\xi)} =
$$

$$
= \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3 \, \Delta^{(x\mathring{x})} \, \Delta^{(\mathring{x}\xi)}. \tag{2.9.5}
$$

В результате отношение объемов равно

$$
\frac{\mathrm{d}\hat{V}}{\mathrm{d}\mathring{V}} = \frac{\Delta^{(x\xi)}}{\Delta^{(\mathring{x}\xi)}} = \Delta^{(x\mathring{x})}. \tag{2.9.6}
$$

В силу аффинности преобразования малой частицы это отношение не зависит от формы выделенного объема $\mathrm{d}\mathring{V}$.

Уравнение сохранения массы в лагранжевых переменных. Так как масса выделенной частицы при движении не меняется:

$$
\rho \mathrm{d}\hat{V} = \rho_0 \mathrm{d}\mathring{V} ,
$$

то закон сохранения массы (mass conservation law) в декартовых лагранжевых переменных $\mathring{x}_1$, $\mathring{x}_2$, $\mathring{x}_3$, t имеет вид

$$
\rho(\mathring{x} \, , t) \Delta^{(x\mathring{x})} (\mathring{\mathbf{x}} \, , t) = \rho_0(\mathring{x}). \tag{2.9.7}
$$

В произвольных лагранжевых переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3, t это уравнение имеет вид

$$
\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \cdot \Delta^{(x\xi)} (\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \rho_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cdot \Delta^{(\mathring{x}\xi)} (\xi_1, \xi_2, \xi_3). \tag{2.9.8}
$$

Ясно, что объем частицы меняется только за счет деформации. Поэтому отношение плотностей ρ/ρ_0 можно выразить через компоненты тензора деформации. В частности, учитывая (2.7.35), изменение плотности в материальной точке выражается через компоненты ланграножевого тензора деформаций в главных осях

$$
\rho/\rho_0 = \sqrt{\left(1 + 2\mathring{\varepsilon}^*_{11}\right)\left(1 + 2\mathring{\varepsilon}^*_{22}\right)\left(1 + 2\mathring{\varepsilon}^*_{33}\right)} \, . \tag{2.9.9}
$$

При этом следует иметь в виду, что главные оси тензора деформаций в общем случае меняются по координатам точек и во времени.

Дифференцируя уравнение (2.9.7) или (2.9.8) по времени, получим дифференциальное уравнение сохранения массы в лагранжевых переменных, определяющее скорость изменения плотности в материальной точке

$$\Delta^{(x\xi)}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}+\rho\left(\frac{\partial\Delta^{(x\xi)}}{\partial t}\right)_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}=0 \qquad \left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right), \qquad (2.9.10)$$

которое можно представит в виде

$$\frac{\rho_0}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}+\frac{1}{\overset{\circ}{\Delta}{}^{(x\xi)}}\frac{\partial\Delta^{(x\xi)}}{\partial t}=0,$$

или

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\Delta^{(x\xi)}}\frac{\mathrm{d}\Delta^{(x\xi)}}{\mathrm{d}t}=0, \qquad (2.9.11)$$

Уравнение сохранения массы в эйлеровых переменных. Дифференциальное уравнение сохранения массы в эйлеровых переменных следует из уравнения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\mathrm{d}V)=0. \qquad (2.9.12)$$

После дифференцирования произведения имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\mathrm{d}V)=\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}V)+(\mathrm{d}V)\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0.$$

После несложных преобразований с учетом уравнений (2.8.25) для скорости изменения объема получим

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=-\frac{\rho}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}V)=-\rho(\nabla\cdot\mathbf{v}),$$

что дает уравнение для изменения плотности материальной частицы

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\nabla\cdot\mathbf{v}=0, \qquad (2.9.13)$$

которое можно переписать, учитывая определение субстациональной производной ($\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t=\mathrm{d}\rho/\partial t+v_i\nabla_i\rho$)

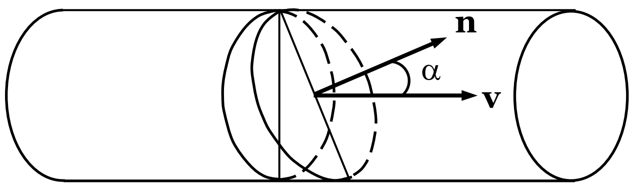

Рис. 2.9.1.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \qquad (2.9.14)$$

Дифференциальные уравнения сохранения массы (2.9.11), (2.9.13) или (2.9.14) называются уравнениями неразрывности.

Поток массы через поверхность. Рассмотрим поток массы через малую площадку $\mathrm{d}s$ (см. рис. 2.9.1) с внешней единичной по отношению к объему V_E нормалью $\mathbf{n}$ и центром в точке M, в которой скорость равна $\mathbf{v}$. Этот поток массы, отнесенный к единице площади $\mathrm{d}s$ обозначим через j. Ясно, что он зависит от координат точки M, времени t и направления площадки $\mathrm{d}s$, определяемый нормалью $\mathbf{n}$

$$j = j(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}). \qquad (2.9.15)$$

Угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$ обозначим через α. Выделим около точки M трубку тока $\mathbf{v}$ – цилиндрическую поверхность с направлениями, параллельными скорости и проведенными через границу $\mathrm{d}s$ и проекцию $\mathrm{d}s$ на плоскость, перпендикулярную вектору скорости $\mathbf{v}$. Обозначим через $\mathrm{d}s_n$, так что $\mathrm{d}s_n = \mathrm{d}s \cos\alpha$.

Через боковую цилиндрическую поверхность утока и притока массы нет. Расход массы через сечение $\mathrm{d}s_n$ равен $(\rho v)_{\tilde{M}}\,\mathrm{d}s_n$, где $M_n \in \mathrm{d}s_n$, а расход массы через рассматриваемое (произвольное) сечение $\mathrm{d}s$ равен $j\mathrm{d}s$. Разница между последними двумя расходами идет на изменение массы в выделенном малом объеме трубки тока между сечениями $\mathrm{d}s$ и $\mathrm{d}s_n$, и равном $\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\mathrm{d}s_n\mathrm{d}l$, где $\mathrm{d}l = \mathrm{O}(\sqrt{ds})\,\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{O}(\sqrt{ds})$.

В итоге баланс массы имеет вид

$$\Delta\rho \, {}^{1}\!/_{2}\, \mathrm{d}s \cos\alpha \;\; \mathrm{O}(\sqrt{ds}) = (\rho v)_{\tilde{M}} \; \mathrm{d}s \cos\alpha \;\; \Delta t \; - j \,\mathrm{d}s\, \Delta t, \qquad (2.9.16)$$

где $\Delta\rho$ изменение плотности в объеме $\mathrm{d}V$ за время $\mathrm{d}t$. Разделив это уравнение на $\mathrm{d}s$ и Δt, получим

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t}\,\mathrm{O}(\sqrt{\mathrm{d}s}\,) = (\rho v)_{\tilde{M}} \cos\alpha\ - j. \tag{2.9.17}$$

Устремляя $\mathrm{d}s \to 0$, стягивая сечение к точке M и $\tilde{M} \to M$ получим

$$j(M, \mathbf{n}) = +\,(\rho v)_M \cos\alpha. \tag{2.9.I8}$$

Таким образом, уход массы через сечение $\mathrm{d}s$ из объема, откуда исходит нормаль $\mathbf{n}$, в объем, куда нормаль $\mathbf{n}$ направлена, равен

$$j(\mathbf{n})\mathrm{d}s = +\,\rho\mathbf{v}\,\mathbf{n}\mathrm{d}s = +\,\rho\, v_k\, n_k\, \mathrm{d}s. \tag{2.9.19}$$

Таким образом, можно ввести векторное поле потока массы $\mathbf{j}$ с проекцией j_n на произвольное направление $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{j} = +\,\rho\mathbf{v}, \quad j_n = \rho\, v_n = \rho\, v_k\, n_k,$$

которое в соответствие с представительностью этого поля определяет поток массы в сторону нормали $\mathbf{n}$ через произвольную поверхность S в виде интеграла

$$-\int_S j_n\, \mathrm{d}s = -\int_S \rho\, \mathbf{v}\, \mathbf{n}\mathrm{d}s. \tag{2.9.20}$$