§ 10. Главные оси симметрического тензора 2-го ранга

В § 8 было показано, что для любого тензора второго ранга **T** и для любого направления **μ** (единичного вектора) можно поставить в соответствие вектор-проекцию $\mathrm{pr}_\mu\,\mathbf{T}$ (см. (1.8.3)):

$$\mathrm{pr}_\mu\,\mathbf{T} = \mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\mu} = T_{ij}\,\mu_j\,\mathbf{e}_i = \mathbf{T}_j\,\mu_j \quad (\text{где } \mathbf{T}_j = T_{ij}\,\mathbf{e}_i = \mathrm{pr}_\mu\,\mathbf{T}). \qquad (1.10.1)$$

где $\mathbf{T}_j$ может рассматривать как вектор-проекция тензора **T** на направление $\mathbf{e}_j$, и компонентами этого вектора-проекции $\mathbf{T}_j$ являются компоненты j-го столбца матрицы T:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} & \\ & \begin{matrix} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_3 \end{matrix} & \end{array} \qquad (1.10.2)$$

$$\mathbf{T}_1 = T_{i1}\,\mathbf{e}_i = T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3\,,$$

$$\mathbf{T}_2 = T_{i2}\,\mathbf{e}_i = T_{12}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2 + T_{32}\mathbf{e}_3\,,$$

$$\mathbf{T}_3 = T_{i3}\,\mathbf{e}_i = T_{13}\mathbf{e}_1 + T_{23}\mathbf{e}_2 + T_{33}\mathbf{e}_3\,.$$

Проекция вектора **t** на единичное направление **μ**, равная

$$\mathrm{pr}_\mu\,\mathbf{t} = \mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\mu} = t_j\,\mu_j, \qquad (1.10.3)$$

является скаляром. Проекция тензора 2-го ранга **T** на единичное направление **μ**, является вектором.

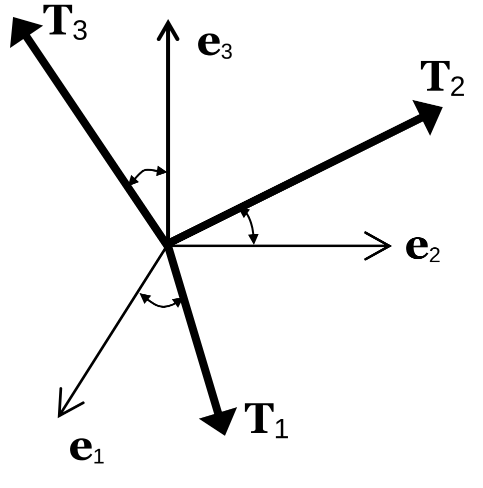

Рис. 1.10.1.

Заметим, что вектор-проекция $\mathbf{T}_1$ коллинеарен $\mathbf{e}_1$ тогда и только тогда, когда $T_{21} = T_{31} = 0$, $\mathbf{T}_2$ коллинеарен $\mathbf{e}_2$ тогда и только тогда, когда $T_{12} = T_{32} = 0$, $\mathbf{T}_3$ коллинеарен $\mathbf{e}_3$ тогда и только тогда, когда $T_{13} = T_{23} = 0$. Другими словами вектор-проекция тензора 2-го ранга $\mathbf{T}$ на $\mathbf{e}_j$, обозначаемый через $\mathbf{T}_j$, коллинеарен $\mathbf{e}_j$ тогда и только тогда, когда равны нулю обе недиагональные компоненты j-го столбца матрицы T_{ij}, соответствующего $\mathbf{T}_j$.

В общем случае вектора-проекции тензора второго ранга $\mathbf{T}$ на базисные вектора $\mathbf{e}_j$, обозначаемые через $\mathbf{T}_j$, неколлинеарны “своим” базисным векторам $\mathbf{e}_j$, т.е. в общем случае $\mathbf{T}_1$ неколлинеарен $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{T}_2$ неколлинеарен $\mathbf{e}_2$, и $\mathbf{T}_3$ неколлинеарен $\mathbf{e}_3$ (см. рис. 1.10.1).

Можно поставить вопрос: можно ли для данного тензора 2-го ранга $\mathbf{T}$ подобрать такой (собственный) ортонормированный базис, обозначаемый как $\mathbf{e}_1^{(T)}$, $\mathbf{e}_2^{(T)}$, $\mathbf{e}_3^{(T)}$ или $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$, для которого вектора-проекции этого тензора $\mathbf{T}_1^*$, $\mathbf{T}_2^*$, $\mathbf{T}_3^*$ коллинеарны соответствующим базисным векторам:

$$\mathbf{T}_j^* = \lambda^{(j)}\, \mathbf{e}_j^{(T)} \qquad (j = 1, 2, 3)\ ?$$ [1]

Если это возможно, то в таком особом (собственном) базисе матрица данного тензора второго ранга имеет диагональный вид:

$$(T_{ij}^*) = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Чтобы ответить на поставленный вопрос и построить соответствующую теорию, введем понятия главных или собственных направлений и главных (собственных) значений для данного тензора второго ранга $\mathbf{T}$.

Определение. Направление, задаваемое единичным вектором $\boldsymbol{\mu}$, на которое вектор-проекция тензора $\mathbf{T}$ коллинеарен $\boldsymbol{\mu}$:

$$\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\mu} = \lambda\, \boldsymbol{\mu}$$

---

[1] Подчеркнем, что в этом выражении нет «немого» суммирования по j, для чего для коэффициенте $\lambda^{(j)}$ индекс j поставлен вверх и взят в скобки.

называется главным направлением (principal direction) для тензора **T** или его главной осью, а значение λ, равное длине этого вектора-проекции, – главным или собственным (principal value) значением тензора **T.**

Определение главного направления (1.10.1) можно представить через компоненты T_{ij}. и μ_j.

$$T_{ij}\,\mu_j\,\mathbf{e}_i\ = \lambda\boldsymbol{\mu}, \qquad T_{ij}\,\mu_j\ = \lambda\mu_i\ , \quad T_{ij}\,\mu_j\ = \lambda\delta_{ij}\,\mu_j\,. \tag{1.10.7}$$

В итоге имеем

$$(T_{ij}\,\mu_j\ - \lambda\delta_{ij}\,\mu_j) = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

что представляет систему трех линейных однородных уравнений относительно μ_j и λ. Добавляя уравнение, следующее из того, что вектор **μ** единичный (μ = 1), получим четыре уравнения относительно четырех неизвестных (μ_1, μ_2, μ_3, T):

$$\begin{aligned}
&(T_{11} - \lambda)\,\mu_1 \ + T_{12}\,\mu_2 \ + T_{13}\,\mu_3 = 0,\\
&T_{21}\,\mu_1 + \ (T_{22} - \lambda)\,\mu_2 \ + T_{23}\,\mu_3 = 0,\\
&T_{31}\,\mu_1 \ + \ T_{32}\,\mu_2 \ + \ (T_{22} - \lambda)\,\mu_3 = 0,\\
&\mu_i\,\mu_i = 1.
\end{aligned}$$

Однородная линейная система уравнений имеет нетривиальное решение, если определитель этой системы равен 0:

$$\det(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}) \equiv \left\| T_{ij} - T\delta_{ij} \right\| = 0, \tag{1.10.8}$$

т.е.
$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{1.10.8a}$$

Раскрыв этот определитель, получим *характеристическое*, или вековое уравнение относительно возможных собственных значений

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda + I_3 = 0, \tag{1.10.9}$$

$$I_1 = T_{ii}\ , \quad I_2 = M_{ii} = \tfrac{1}{2}\,(T_{ii}\,T_{jj} - T_{ji}\,T_{ji}), \quad I_3 = \det(T_{ij}) \equiv \left\| T_{ij} \right\|,$$

т.е. $I_1 = T_{ii}$ – сумма элементов главной диагонали. $I_2 = M_{ii}$ – сумма миноров к элементам главной диагонали, $I_3 = \det(T_{ij}) \equiv \left\| T_{ij} \right\|$ – определитель матрицы T. При преобразовании координат значения I_1, I_2, I_3 – не меняются, т.е. являются скалярами, или инвариантами ($I_1 = I'_1$, $I_2 = I'_2$, $I_3 = I'_3$), что можно показать, используя формулу преобразований (1.4.1) для T'_{ij} относительно T_{kl}. Инвариантность I_3, т.е. определителя матрицы T при преобразованиях координат следует из (1.5.4). Из инвариантности коэффициентов I_1, I_2, I_3 характеристического уравнения следует, что инвариантными являются характеристическое уравнение, его корни и собственные значения λ, являющиеся корнями характеристического уравнения.

Так как характеристическое уравнение определяется полиномом 3-й степени с действительными коэффициентами, то хотя бы один корень векового уравнения действительный. Пусть это будет $\lambda^{(1)}$. Для этого $\lambda^{(1)}$ найдем $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$ из системы уравнений (1.10.7) или (1.10.7а), так что

$$\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\mu}^{(1)} = \lambda^{(1)} \boldsymbol{\mu}^{(1)}.$$

Перейдем к другой системе координат, у которой первый базисный вектор был направлен вдоль главного направления исследуемого тензора **T**, т.е. чтобы

$$\boldsymbol{\mu}^{(1)} = \mathbf{e}_1^{(\mathrm{T})} \equiv \mathbf{e}_1^*.$$

Компоненты исследуемого тензора **T** в новой системе координат, по-прежнему, образуют матрицу, которая имеет следующий вид, если учесть, что $\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_1^{(\mathrm{T})} = \lambda^{(1)} \mathbf{e}_1^{(\mathrm{T})} \equiv \lambda^{(1)} \mathbf{e}_1^*$:

$$\mathrm{T}' = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & T'_{12} & T'_{13} \\ 0 & T'_{22} & T'_{23} \\ 0 & T'_{32} & T'_{33} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти два оставшихся характеристических направления, вновь в соответствии с (1.10.3) (но в новой системе координат $\mathbf{e}'_1 \equiv \mathbf{e}_1^{(\mathrm{T})}$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$) запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda^{(1)}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & T'_{22}-\lambda & T'_{23} \\ 0 & T'_{32} & T'_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель:

$$(\lambda^{(1)}-\lambda)\,[(T'_{22}-\lambda)(T'_{33}-\lambda)-T'_{23}\,T'_{32}]=0.$$

Два новых направления можно получить, если положить равным нулю выражение в квадратных скобках, что дает квадратное характеристическое уравнение для главных значений λ:

$$\lambda^2-(T'_{22}+T'_{33})\lambda+T'_{22}\,T'_{33}-T'_{23}\,T'_{32}=0, \qquad (1.10.11)$$

корни которого имеют вид

$$\lambda^{(2,3)}=\tfrac{1}{2}\{(T'_{22}+T'_{33})\pm\sqrt{(T'_{22}-T'_{33})^2+4T'_{23}T'_{32}}\}. \qquad (1.10.12)$$

Далее ограничимся *симметричными* тензорами ($T_{ij}=T_{ji}$). Так как свойство симметрии инвариантно при преобразовании координат (см. § 5), то в новой (штрихованной) системе координат оно сохраняется и

$$T'_{23}=T'_{32}.$$

Поэтому для симметричного тензора **T** в характеристическом уравнении (1.10.12) под радикалом стоит сумма квадратов действительных чисел, т.е. неотрицательная величина. Отсюда следует два варианта для решения, характеристического квадратного уравнения (1.10.11) симметричного тензора:

(а) имеется два различающихся между собой действительных корня $\lambda^{(2)}$ и $\lambda^{(3)}$, и для каждого из них существует свое собственное направление, определяемой единичными векторами $\boldsymbol{\mu}^{(2)}$ и $\boldsymbol{\mu}^{(3)}$;

(б) имеется два совпадающих между собой корня $\lambda^{(2)}=\lambda^{(3)}$. Последнее возможно, только если

$$T'_{23}=0, \quad T'_{22}=T'_{33}=\lambda^{(2)}=\lambda^{(3)}. \qquad (1.10.13)$$

В последнем варианте совпадающих корней матрица (1.10.10) тензора **T** в любой системе координат, в которой $\mathbf{e}'_1 = \boldsymbol{\mu}^{(1)} \equiv \mathbf{e}_1^{(\mathrm{T})} \equiv \mathbf{e}_1^*$ имеет диагональный вид

$$\mathrm{T}' = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} \end{pmatrix} \quad (\lambda^{(2)} = \lambda^{(3)}). \qquad (1.10.14)$$

При всех преобразованиях путем вращения вокруг первого главного направления $\boldsymbol{\mu}^{(1)} = \mathbf{e}_1^{(\mathrm{T})}$ матрица тензора не меняется, что следует из инвариантности $\lambda^{(2)} = \lambda^{(3)}$ (последнее требует выполнения (1.10.13)), а также может быть установлено непосредственно из формул преобразования (1.5.3) для компонент тензора 2-го ранга, если учесть, что указанным $\mathbf{e}'_2$ и $\mathbf{e}'_3$ вокруг $\mathbf{e}'_1$ соответствует матрица образования

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Теорема: Если два собственных значения равны между собой ($\lambda^{(2)} = \lambda^{(3)}$) и матрица тензора имеет вид (1.10.14), любое направление $\boldsymbol{\mu}$ (в частности $\mathbf{e}'_2$ и $\mathbf{e}'_3$), лежащее в плоскости, ортогональной первому главному направлению $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$, является главным.

Действительно для (1.10.14) базисные вектора $\mathbf{e}'_2 \Rightarrow (0,\ 1,\ 0)$ и $\mathbf{e}'_3 \Rightarrow (0,\ 0,\ 1)$ являются главными, т.к.

$$\mathbf{T}'_2 = (0,\ \lambda^{(2)}\,\mathbf{e}'_2,\ \ 0\ ) \cdot (0, 1, 0) = \lambda^{(2)}\,\mathbf{e}'_2,$$

$$\mathbf{T}'_3 = (0,\ \ 0,\ \ \lambda^{(3)}\,\mathbf{e}'_3) \cdot (0, 0, 1) = \lambda^{(3)}\,\mathbf{e}'_3.$$

Тогда для любого $\boldsymbol{\mu} = \alpha\mathbf{e}'_2 + \beta\mathbf{e}'_3$, для которого $\mu'_1 = 0,\ \mu'_2 = \alpha,\ \mu'_3 = \beta$ имеет место

$$\mathbf{T}'_{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{T}'_1\,\mu'_1 + \mathbf{T}'_2\,\mu'_2 + \mathbf{T}'_3\,\mu'_3 = 0 + \alpha\,\lambda^{(2)}\,\mathbf{e}'_2 + \beta\,\lambda^{(3)}\,\mathbf{e}'_3 =$$

$$= \lambda^{(2)}\,(\alpha\,\mathbf{e}'_2 + \beta\,\mathbf{e}'_3) = \lambda^{(2)}\,\boldsymbol{\mu}\,.$$

Если $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = \lambda$, тогда

$$T' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E = (\lambda\delta_{ij}),$$

и тензор является изотропным (см. (1.8.19) и (1.8.29)) или шаровым. Для шарового тензора любое направление является главным, и проекция тензора на любое направление совпадает с этим направлением. Причем в любой системе координат шаровой тензор имеет инвариантный вид.

Рассмотрим два разных собственных значения T, а именно $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)}$:

$$\left.\begin{aligned} (T_{ij} - \lambda^{(1)}\delta_{ij})\,\mu_j^{(1)} = 0 \\ (T_{ij} - \lambda^{(2)}\delta_{ij})\,\mu_j^{(2)} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Умножим эти уравнения соответственно на $\mu_i^{(2)}$ и $\mu_i^{(1)}$ и просуммируем по i:

$$\left.\begin{aligned} (T_{ij} - \lambda^{(1)}\delta_{ij})\,\mu_j^{(1)}\mu_i^{(2)} = 0 \\ (T_{ij} - \lambda^{(2)}\delta_{ij})\,\mu_j^{(2)}\mu_i^{(1)} = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Вычтем второе уравнение из первого из другого и получим:

$$T_{ij}\,\mu_i^{(2)}\,\mu_j^{(1)} - \lambda^{(1)}\,\delta_{ij}\mu_j^{(1)}\,\mu_i^{(2)} - T_{ij}\mu_j^{(2)}\,\mu_i^{(1)} - \lambda^{(2)}\,\delta_{ij}\mu_j^{(2)}\,\mu_i^{(1)} = 0.$$

Так как $T_{ij} = T_{ji}$, имеем $T_{ij}\mu_i^{(2)}\,\mu_j^{(1)} = T_{ij}\,\mu_j^{(2)}\,\mu_i^{(1)}$. Тогда

$$\lambda^{(2)}\,\mu_j^{(2)}\,\mu_j^{(1)} - \lambda^{(1)}\,\mu_j^{(1)}\,\mu_j^{(2)} = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)})\,\mu_j^{(1)}\,\mu_j^{(2)} = 0. \quad (1.10.15)$$

Так как $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)}$, то из последнего равенства следует, что $\mu_j^{(1)}\,\mu_j^{(2)} = 0$ или $\boldsymbol{\mu}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\mu}^{(2)} = 0$, то есть $\boldsymbol{\mu}^{(1)} \perp \boldsymbol{\mu}^{(2)}$. Отсюда следует теорема.

Теорема: (ортогональности) Разным собственным значениям симметричного тензора 2-го ранга соответствует взаимно-ортогональные главные направления.

Из этой теоремы следует:

Теорема: Если симметричный тензор 2-го ранга имеет три неравных между собой собственных значения $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$, то им соответствуют три взаимно-ортогональных главных направления $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$, $\boldsymbol{\mu}^{(2)}$, $\boldsymbol{\mu}^{(3)}$ (для которых $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\mu}(i)} = \lambda^{(i)}\ \boldsymbol{\mu}^{(i)}$), и эта тройка векторов (с точностью до знака) единственная.

Докажем единственность. Пусть, например, для $\lambda^{(1)}$ существуют $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$ и $\boldsymbol{\mu}^{(1)\prime}$ для которых

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\mu}(1)} = \lambda^{(1)}\ \boldsymbol{\mu}^{(1)}, \quad \mathbf{T}_{\boldsymbol{\mu}(1)'} = \lambda^{(1)}\ \boldsymbol{\mu}^{(1)\prime},$$

но так как $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)}$, $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(3)}$, то в соответствии с теоремой ортогональности (1.10.15) вектора $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$ и $\boldsymbol{\mu}^{(1)\prime}$ортогональны к плоскости, образованной ортогональными друг к другу векторами $\boldsymbol{\mu}^{(2)}$ и $\boldsymbol{\mu}^{(3)}$. Поэтому $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$ и $\boldsymbol{\mu}^{(1)\prime}$ – коллинеарны.

Теорема: Матрица тензора $\mathbf{T}$ в базисе, составленном из главных направлений ($\mathbf{e}_1' = \boldsymbol{\mu}^{(1)} \equiv \mathbf{e}_1^{(\mathrm{T})}$, $\mathbf{e}_2' = \boldsymbol{\mu}^{(2)} \equiv \mathbf{e}_2^{(\mathrm{T})}$, $\mathbf{e}_3' = \boldsymbol{\mu}^{(3)} \equiv \mathbf{e}_3^{(\mathrm{T})}$), будет диагональной, и обратно, если матрица тензора в некотором базисе имеет диагональный вид, то базисные вектора совпадают с главными направлениями

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1' &= T^{(1)}\ \boldsymbol{\mu}^{(1)} = T^{(1)}\ \mathbf{e}_1', \\ \mathbf{T}_2' &= T^{(2)}\ \boldsymbol{\mu}^{(2)} = T^{(2)}\ \mathbf{e}_2', \\ \mathbf{T}_3' &= T^{(3)}\ \boldsymbol{\mu}^{(3)} = T^{(3)}\ \mathbf{e}_3', \end{aligned} \tag{1.10.16}$$

$$\mathrm{T}' = \begin{pmatrix} T^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & T^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & T^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Зная представление тензора в собственной системе координат, можно его представить в любой другой системе координат.

Пусть в системе координат $\mathbf{e}_i$ главные направления определяются в следующем виде:

$$\boldsymbol{\mu}^{(1)} = \mathbf{e}_1' = \mu_i^{(1)}\mathbf{e}_i = \alpha_{1i}\mathbf{e}_i \quad (\alpha_{1i} = \mu_i^{(1)}),$$

$$\boldsymbol{\mu}^{(2)} = \mathbf{e}_2' = \mu_i^{(2)}\mathbf{e}_i = \alpha_{2i}\mathbf{e}_i \quad (\alpha_{2i} = \mu_i^{(2)}),$$

$$\boldsymbol{\mu}^{(3)} = \mathbf{e}_3' = \mu_i^{(3)}\mathbf{e}_i = \alpha_{3i}\mathbf{e}_i \quad (\alpha_{3i} = \mu_i^{(3)}).$$

Тогда в системе координат $\mathbf{e}_i$ в соответствии с формулой преобразования компонент тензора (1.5.3) и правилом “штрихованного индекса” в конце §3, учитывая (1.10.16) и то, что $T_{ij}' = \lambda^{(i)}\ \delta_{ij}$, имеем

$$T_{ij} = T'_{kl}\,\alpha_{ki}\,\alpha_{lj} = T'_{11}\,\alpha_{1i}\,\alpha_{1j} + T'_{22}\,\alpha_{2i}\,\alpha_{2j} + T'_{33}\,\alpha_{3i}\,\alpha_{3j} =$$

$$= \lambda^{(1)}\,\mu_i^{(1)}\,\mu_j^{(1)} + \lambda^{(2)}\,\mu_i^{(2)}\,\mu_j^{(2)} + \lambda^{(3)}\,\mu_i^{(3)}\,\mu_j^{(3)}.$$

Действительно направлению $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$ соответствует вектор-проекция

$$(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{\mu}(1)}\mathrm{T})_i = (\mathbf{T}_{\boldsymbol{\mu}(1)})_i = T_{ij}\,\mu_j^{(1)} =$$

$$= \lambda^{(1)}\mu_i^{(1)}\underbrace{\mu_j^{(1)}\mu_j^{(1)}}_{\substack{||\\ 1,\ \text{т.к.}\ \left|\boldsymbol{\mu}^{(1)}\right|=1;}} + \lambda^{(2)}\mu_i^{(2)}\underbrace{\mu_j^{(2)}\mu_j^{(1)}}_{\substack{||\\ 0,\ \text{т.к.}\ \boldsymbol{\mu}^{(2)}\perp\boldsymbol{\mu}^{(1)};}} + \lambda^{(3)}\mu_i^{(3)}\underbrace{\mu_j^{(3)}\mu_j^{(1)}}_{\substack{||\\ 0,\ \text{т.к.}\ \boldsymbol{\mu}^{(3)}\perp\boldsymbol{\mu}^{(1)};}} = \lambda^{(1)}\mu_i^{(1)}.$$

Таким образом для любого симметричного тензора 2-го ранга можно найти собственный ортонормированнцй базис $\mathbf{e}_1^{(\mathrm{T})}$, $\mathbf{e}_2^{(\mathrm{T})}$, $\mathbf{e}_3^{(\mathrm{T})}$ или $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$, для которого вектора-проекции этого тензора $\mathbf{T}_1^*$, $\mathbf{T}_2^*$, $\mathbf{T}_3^*$ коллинеарны соответствующим базисным векторам:

$$\mathbf{T}_j^* = T^{(j)}\,\mathbf{e}_j^{(\mathrm{T})} \equiv T^{(j)}\,\mathbf{e}_j^* \quad (j = 1, 2, 3). \tag{1.10.17}$$

Здесь собственные значения $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$ тензора переобозначены через $T^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$).

§ 11. Симметричный тензор 2-го ранга, квадратичная форма и поверхность 2-го порядка

Любому симметричному тензору второго ранга **T** можно подставить в соответствие квадратичную форму

$$F\,(z_1, z_2, z_3) = T_{ij}\,z_i\,z_j, \tag{1.11.1}$$

называемую тензорной функцией, и поверхность второго порядка, определяемую уравнением

$$F\,(z_1, z_2, z_3) = C = \mathrm{const} \quad \text{или} \quad T_{ij}\,z_i\,z_j = C = \mathrm{const}, \tag{1.11.2}$$

и называемую тензорной поверхностью.

В другой системе координат z'_k с базисом $\mathbf{e}'_k$ эта поверхность определяется выражением

$$T_{ij}\,\alpha_{ki}\,z'_k\,\alpha_{lj}\,z'_l = C \Rightarrow T_{ij}\,\alpha_{ki}\,\alpha_{lj}\,z'_k\,z'_l = C$$

$$(z_i = z'_k\,\alpha_{ki},\quad z_j = z'_l\,\alpha_{ij}).$$

Откуда имеем

$$\tilde{T}_{kl}\, z'_k\, z'_l = C, \quad \text{где} \quad \tilde{T}_{kl} = T_{ij}\, \alpha_{ki}\, \alpha_{lj} = T'_{kl},$$

т.е. преобразование коэффициентов квадратичной формы (определяющей поверхность 2-го порядка, поставленную в соответствие симметричному тензору) такое же, как и преобразование компонент тензора.

> ***Теорема:*** Соответствие симметричного тензора 2-го ранга, квадратичной формы и поверхности 2-го порядка – инвариантно (т.е. сохраняется) при преобразовании координат.

Приведение симметричного тензора 2-го ранга к главным осям равносильно приведению соответствующей квадратичной формы или поверхности 2-го порядка к главным осям или каноническому виду, в котором эта квадратичная форма имеет вид:

$$\lambda^{(1)} z_1'^2 + \lambda^{(2)} z_2'^2 + \lambda^{(3)}\ z_3'^2 = C. \tag{1.11.3}$$

Рассмотрим градиент тензорной функции $F\ (z_1, z_2, z_3)$, который направлен в сторону увеличения F по нормали к тензорной поверхности $F(z_1, z_2, z_3) = C$, проходящей через рассматриваемую точку

$$\operatorname{grad} F = \frac{\partial F}{\partial z_i}\ \mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial z_i}(T_{kl}\, z_k\, z_l)\ \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i\, T_{kl}\left(\frac{\partial z_k}{\partial z_i}\, z_l + z_k\, \frac{\partial z_l}{\partial z_i}\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial z_k}{\partial z_i} = \delta_{ki}, \quad \frac{\partial z_l}{\partial z_i} = \delta_{li}, \quad T_{kl}\,\delta_{ki} = T_{il}, \quad T_{kl}\,\delta_{li} = T_{ki},$$

получим

$$\operatorname{grad} F = \mathbf{e}_i\,(T_{il}\, z_l + T_{ki}\, z_k).$$

Тензор $\mathbf{T}$ – симметричен, т.е. $T_{ki} = T_{il}$. Поэтому

$$\operatorname{grad} F = (T_{il}\, z_l + T_{ki}\, z_k\,)\mathbf{e}_i = (T_{ki}\, z_k + T_{ki}\, z_k)\ \mathbf{e}_i = 2\ T_{ki}\, z_k\ \mathbf{e}_i.$$

Радиусу-вектору $\mathbf{z} = z_k\ \mathbf{e}_k$ соответствует направление, определяемое единичным вектором $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{z}/z = \mu\ \mathbf{e}_k$, где $\mu_k = z_k/z$, $z = \sqrt{z_l z_l}$. Поэтому

$$\frac{1}{2z}\ \operatorname{grad} F = T_{ki}\ \mu_k\, \mathbf{e}_i = \boldsymbol{T}_{\mu}. \tag{1.11.4}$$

> ***Теорема.*** Нормаль $\boldsymbol{\nu}$ в точке тензорной поверхности симметричного тензора 2-го ранга и градиент тензорной функции в этой точке колли-

неарны проекции тензора на направление $\boldsymbol{\mu}$, задаваемое радиусом вектором $\mathbf{r}$ этой точки (см. рис. 1.11.1).

На рис. 1.11.1 приведена плоская схема, фактически представляющая проекцию тензорной поверхности и некоторые проекции векторов-проекций тензора $\mathbf{T}$ на плоскость его собственных векторов $\mathbf{e}_1^{(\mathrm{T})}$ и $\mathbf{e}_2^{(\mathrm{T})}$). Эта схема иллюстрирует последнюю теорему.

Главному направлению $\boldsymbol{\mu}$ тензора $\mathbf{T}$ соответствует такой радиус-вектор $\mathbf{z} = z\,\boldsymbol{\mu}$, для которого нормаль к тензорной поверхности $\boldsymbol{\nu}$ коллинеарна $\mathbf{z}$ и $\boldsymbol{\mu}$ (см. $\mathbf{e}_1^{(\mathrm{T})}$ и $\mathbf{e}_2^{(\mathrm{T})}$ на рис. 1.11.1, т.е. главное направление симметричного тензора второго ранга $\mathbf{T} = T_{kl}\,\mathbf{e}_k\,\mathbf{e}_l$ совпадает с главной осью его тензорной поверхности $T_{kl}\,z_k\,z_l = C$.

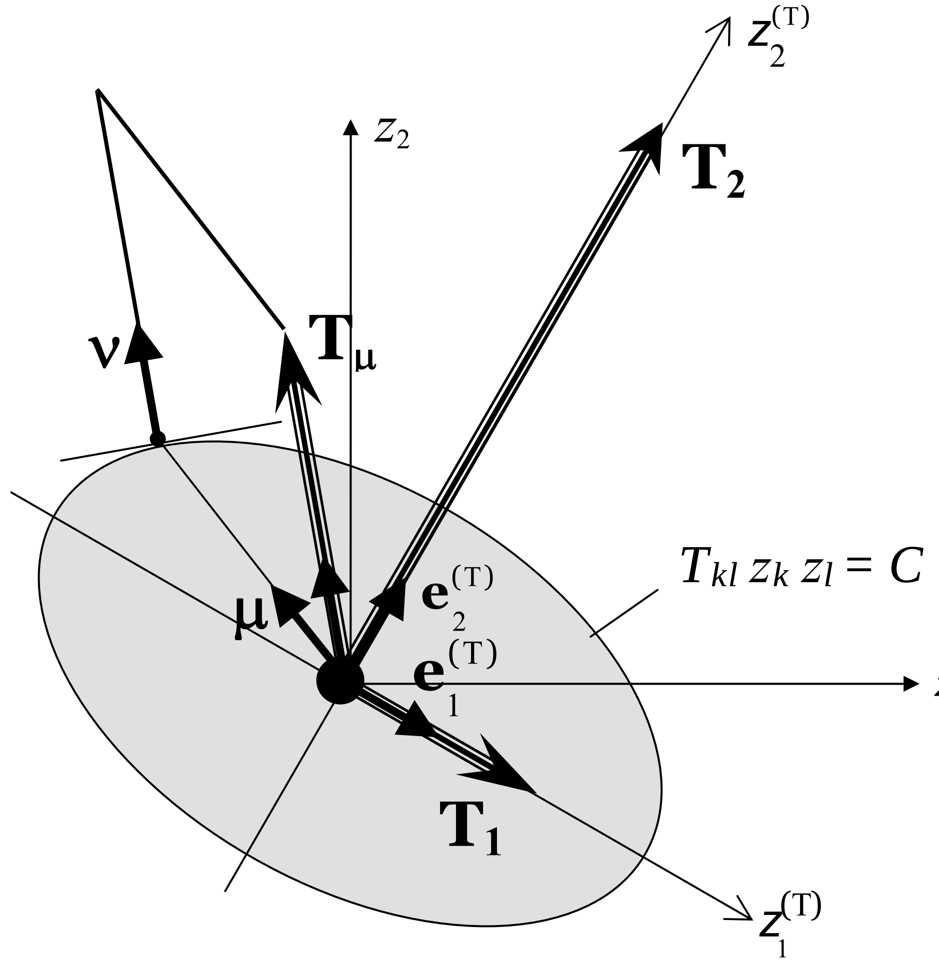

Рис. 1.11.1. Плоская схема тензорной поверхности и векторов-проекций симметричного тензора второго ранга.

Если иметь в виду геометрические образы, то также как геометрическим образом вектора является направленный отрезок (стрелка), геометрическим образом симметричного тензора второго ранга является поверхность второго порядка (эллипсоид, гиперболоид, параболоид, пара плоскостей, эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры и т.д.), позволяющая в соответствии с рис. 1.11.1 для каждого направления $\boldsymbol{\mu}$ определять вектор-проекцию тензора $\mathbf{T}_\mu$.

Для тензора первого ранга $\mathbf{r} = r_k\ \mathbf{e}_k$ (вектора) по аналогии с (1.11.2) тензорная функция имеет вид

$$F^{(1)}(z_1, z_2, z_3) = r_k\, z_k. \tag{1.11.5}$$

а тензорная поверхность определяется уравнением

$$F^{(1)}(z_1, z_2, z_3) = C = \text{const} \quad \text{или} \quad r_k\, z_k = C, \tag{1.11.6}$$

что дает плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{r}$.

Задачи

Найти главные значения, главные оси, тензорные функции и тензорные поверхности следующих симметричных тензоров, заданных в декартовой системе координат

$$1)\ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix};\quad 3)\ \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix};\quad 4)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}.$$