Глава I. ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В данной главе кратко изложены основные сведения о матрицах, тензорах и векторах, заданных компонентами в ортогональных системах координат.

§1. Матрицы и матричная алгебра

В различных областях физики используются матрицы с соответстыующей алгеброй.

Определение. Матрица (matrix) – двумерная или плоская таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Целые числа m и n определяют размер матрицы в виде пары $m \times n$.

Матрица обозначается прямыми заглавными буквами (A, B, E, S), а сами числа в столбцах и строках обозначаются прописными буквами курсивом с двумя нижними индексами (a_{ij}, b_{kl}), где первый индекс обозначает номер строки, а второй – номер столбца:

$$\mathrm{A} \equiv (\lambda a_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots.. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots... & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots... & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots... & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.1.1)$$

Матрица размером 1×1 имеет вид (b), и для ее элемента нижний индекс (b_{11}) индекс не пишется. Выделяют одномерные матрицы строки размером $1 \times n$

$$(b_1\ b_2 \ldots b_n)$$

и матрицы столбцы размером $m \times 1$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_m \end{pmatrix}.$$

В этих матрицах элементы b_{1k} и c_{j1} пишутся с одним индексом (b_k и c_j).

Выделяются единичные матрицы, которые по определению являются квадратными ($n \times n$), и имеют вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1.1.2)$$

т.е. диагональные элементы равны 1 ($a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn}$), а недиагональные равны 0. Обычно для определения единичной матрицы (3 × 3) используется символ δ_{ij} для $i, j = 1, 2, 3$, а именно: $E = (\delta_{ij})$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{если} \quad i = j. \end{cases} \qquad (1.1.3)$$

Ниже в основном будут использоваться квадратные матрицы порядка 3 × 3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

“Немое суммирование”. В матричной и тензорной алгебре используется сокращенное обозначение суммирования. В выражениях вида:

$$a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 \equiv \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \equiv \sum_{k=1}^{3} a_k b_k,$$

$$T_{11} + T_{22} + T_{33} \equiv \sum_{i=1}^{3} T_{ii} \equiv \sum_{k=1}^{3} T_{kk}$$

нижний индекс, по которому происходит суммирование (и который можно обозначить любой буквой: i, k, j и др.), называется “немым” индексом. В дальнейшем, если при суммировании немой (нижний) индекс повторяется дважды, знак суммы будем опускать, т.е.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i\, b_i \equiv a_i b_i \equiv a_k b_k, \qquad \sum_{i=1}^{3} T_{ii} \equiv T_{ii} + T_{kk}. \qquad (1.1.4)$$

Отметим, что немой индекс, встречающийся дважды и означающий суммирование по нему, можно обозначать произвольной буквой.

Следует иметь в виду одно обстоятельство, следующее из рассмотрения произведения сумм

$$S = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} \cdot \sum_{i=1}^{3} b_{ii} \equiv (a_{11} + a_{22} + a_{33})\,(b_{11} + b_{22} + b_{33}).$$

В соответствии с немым суммированием знаки суммы можно опустить. При этом

$$S \neq a_{ii}\, b_{ii} = a_{11}\, b_{11} + a_{22}\, b_{22} + a_{33} b_{33},$$

и правильно в соответствии с немым суммированием написать

$$S = a_{ii} b_{kk}.$$

Таким образом, нужно следить, чтобы любой индекс, в том числе, и тот, по которому производится суммирование, не повторялся более двух раз, иначе могут возникнуть неоднозначность трактовки и описки.

Суммирование с символом Кронекера (дельта-символом) «убивает немой индекс»:

$$\delta_{ik} x_{kl} = (\delta_{i1} x_{1l} + \delta_{i2} x_{2l} + \delta_{i3} x_{3l}) = x_{il}. \qquad (1.1.5)$$

Операции с матрицами. Используются следующие операции с матрицами.

1. Умножение на число

$$\lambda \mathrm{A} = (\lambda a_{ij}). \qquad (1.1.6)$$

2. Сложение матриц одинакового размера

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{C} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n). \qquad (1.1.7)$$

3. Умножение матриц с согласованными размерами, когда число столбцов n_{A} первой матрицы (A) равно числу строк m_{B} второй матрицы (B):

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \times & \mathrm{B} & = & \mathrm{C} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (m_{\mathrm{A}} \times n_{\mathrm{A}}) & & (m_{\mathrm{B}} \times n_{\mathrm{B}}) & & (m_{\mathrm{C}} \times n_{\mathrm{C}}) \end{array}$$

$$(n_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{B}},\ m_{\mathrm{C}} = m_{\mathrm{A}}, n_{\mathrm{C}} = n_{\mathrm{B}}).$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{B}}} a_{ik} b_{kj} \equiv a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, \dots, m_{\mathrm{A}};\ j = 1, \dots, n_{\mathrm{B}}). \qquad (1.1.8)$$

Умножение матриц в общем случае не является коммутативным, т.е. от изменения порядка сомножителей даже для квадратных матриц A и B, если $A \neq B$, произведение меняется:

$$AB \neq BA. \qquad (1.1.9)$$

Нетрудно показать, что умножение на единичную матрицу справа или слева не меняет сомножитель:

$$AE = A, \qquad EA = A. \qquad (1.1.10)$$

4. Транспонирование, при котором матрице A ставится в соответствие другая матрица $A^{(T)}$, «перевернутая» вокруг ее диагонали:

$$A \Rightarrow A^{(T)}: \quad a_{ij}^{(T)} = a_{ji}. \qquad (1.1.11)$$

Взаимообратные матрицы. Если AB = E, то A и B называются взаимообратными:

$$B = A^{-1}, \;\; A = B^{-1}, \;\; b_{ij} = a_{ij}^{(-1)}, \;\; a_{ji} = b_{ij}^{(-1)}.$$

Задачи

1. Докажите: $\delta_{ii} = 3$,
2. Докажите: $\delta_{ij}\delta_{ij} = 3$.
3. Докажите: $\delta_{ik}x_k = x_i$.
4. Докажите: $\delta_{ik}\alpha_{ki} = \alpha_{kk} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$.

§2. Вектора, скалярное и векторное произведения векторов

Пусть x_1, x_2, x_3 – прямоугольная (декартова) система координат с ортонормироавнным базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, т.е. все эти вектора взамино ортогональны, и единичной длины ($|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2, | = |\mathbf{e}_3| = 1$). Все вектора будут обозначаться прямым полужирным шрифтом ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{e}$).

Пусть вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы своими проекциями a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 на оси координат x_1, x_2, x_3:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2, + a_3\mathbf{e}_3, \;\; \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2, + b_3\mathbf{e}_3. \qquad (1.2.1)$$

Далее угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ будет обозначаться в виде $\langle \mathbf{ab} \rangle$.

Скалярное произведение. Вводится следующее определение скалярного произведения.

Определение. Скалярное произведение векторов **a** и **b** как скаляр (число), равное произведению длин этих векторов, обозначаемых в виде $a = |\mathbf{a}|$ и $b = |\mathbf{b}|$, на косинус угла между ними, обозначаемый в виде $\cos\langle\mathbf{ab}\rangle$,

$$(\mathbf{ab}) = ab\cos\langle\mathbf{ab}\rangle. \qquad (1.2.2)$$

Если обозначить проекцию вектора **a** на направление, заданное вектором **b**, в виде $\mathrm{pr}_\mathbf{b}\,\mathbf{a} \equiv (\mathbf{a})_\mathbf{b} \equiv a_\mathbf{b} = a\cos\langle\mathbf{ab}\rangle$, а проекцию вектора **b** на направление, заданное вектором **a**, в виде $\mathrm{pr}_\mathbf{a}\,\mathbf{b} \equiv (\mathbf{b})_\mathbf{a} \equiv b_\mathbf{a} = b\cos\langle\mathbf{ab}\rangle$, то скалярное произведение можно записать в виде

$$(\mathbf{ab}) = a_\mathbf{b}b = ab_\mathbf{a}. \qquad (1.2.3)$$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами, которые часто используются в векторной алгебре:

1. Коммутативность – скалярное произведение не зависит от порядка сомножителей:

$$(\mathbf{ab}) = (\mathbf{ba}). \qquad (1.2.4)$$

2. Линейность – скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения:

$$(\lambda\mathbf{ab}) = \lambda\,(\mathbf{ab}). \qquad (1.2.5)$$

3. Дистрибутивность

$$((\mathbf{a} + \mathbf{c})\mathbf{b}) = (\mathbf{ab}) + (\mathbf{cb}), \qquad (\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{d})) = (\mathbf{ab}) + (\mathbf{db}). \qquad (1.2.6)$$

Действительно $((\mathbf{a} + \mathbf{c})\mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c})_\mathbf{b}b = a_\mathbf{b}b + c_\mathbf{b}b = (\mathbf{ab}) + (\mathbf{cb})$. Второе равенство доказывается аналогично.

4. Скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов равно нулю. В частности, скалярные произведения векторов ортонормированного базиса можно записать через символ Кронекера δ_{ij}, который используется в векторной алгебре:

$$(\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{если} \quad i = j. \end{cases} \qquad (1.2.7.)$$

Исходя из представления векторов (1.2.1) и свойств скалярного произведения (1.2.4) – (1.2.7), можно доказать, что скалярное произведение равно сумме произведений проекций:

$$(\mathbf{ab}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \equiv a_k b_k. \tag{1.2.8}$$

Векторное произведение. Вводится следующее определение векторного произведения.

Определение. Векторное произведение векторов **a** и **b** определяется как вектор **c**, однозначно определяемый тремя признаками:
1) длина его равна произведению длин векторов **a** и **b**, (a = |**a**| и b = |**b**|), на синус угла между ними $\sin\langle\mathbf{ab}\rangle$, т.е. площади паралелограмма, построенного на этих векторах $S_{\mathbf{ab}}$;
2) он лежит на прямой, перпендикулярной плоскости, проходящей через вектора **a** и **b**;
3) направлен в ту сторону указанной прямой, со стороны которой вращение первого вектора (**a**) в сторону второго (**b**) по кратчайшей дуге происходит в том же направлении, в каком с конца оси x_3 происходит вращение на угол $\frac{1}{2}\pi$ оси x_1, к оси x_2. Векторное произведение обозначается квадратными скобками $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$.

Таким образом, направление векторного произведения по определению зависит от ориентировки координатной системы и при преобразованиях системы координат с сохранением ориентировки системы координат векторное произведение двух векторов является инвариантным объектом.

Векторное произведение обладает следующими свойствами, которые часто используются в векторной алгебре:

1. Некоммутативность – векторное произведение при перемене порядка сомножителей меняет знак:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = -[\mathbf{b} \times \mathbf{a}]. \tag{1.2.9}$$

2. Линейность – скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения:

$$[\lambda\, \mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \lambda\, [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]. \tag{1.2.10}$$

3. Дистрибутивность

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b}] = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] + [\mathbf{c} \times \mathbf{b}], \quad [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{d})] = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] + [\mathbf{d} \times \mathbf{b}]. \tag{1.2.11}$$

4. Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю.

В частности, векторные произведения векторов ортонормированного базиса равны:

$$[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1] = [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2] = [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3] = 0,$$

$$[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3\,, \;\; [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3] = -\,\mathbf{e}_2\,, \;\; [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1\,, \qquad (1.2.12)$$

Можно доказать, что векторное произведение можно вычислять с помощью определителя матрицы:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.2.13)$$

§3. Ортогональные преобразования координат

Пусть помимо введенной выше декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ задана еще одна декартова система координат x_1', x_2', x_3' с базисом $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$, которую будем называть новой или штрихованной. Вектор $\mathbf{e}_1'$ может быть представлен через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ с помощью “направляющих косинусов” углов между вектором $\mathbf{e}_1'$ и векторами нештрихованного базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Обозначая эти углы в виде

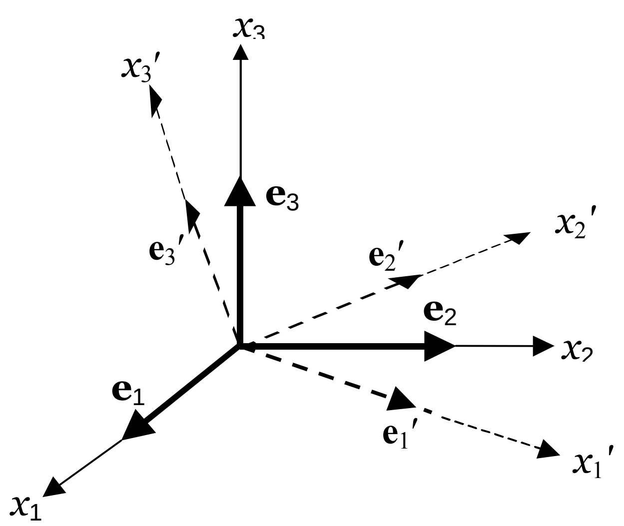
$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 \cos\left\langle \mathbf{e}_1'\mathbf{e}_1 \right\rangle + \mathbf{e}_2 \cos\left\langle \mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2 \right\rangle + \mathbf{e}_3 \cos\left\langle \mathbf{e}_1'\mathbf{e}_3 \right\rangle.$$

Аналогично и для остальных $\mathbf{e}_i'$ ($i = 1, 2, 3$):

$$\mathbf{e}_i' = \mathbf{e}_1 \cos\left\langle \mathbf{e}_i'\mathbf{e}_1 \right\rangle + \mathbf{e}_2 \cos\left\langle \mathbf{e}_i'\mathbf{e}_2 \right\rangle + \mathbf{e}_3 \cos\left\langle \mathbf{e}_i'\mathbf{e}_3 \right\rangle. \qquad (1.3.1)$$

Введем обозначение для “направляющих косинусов”

$$\cos\left\langle \mathbf{e}_i'\mathbf{e}_j \right\rangle \equiv \alpha_{ij} = \alpha_{ji}. \qquad (1.3.2)$$



Для запоминания следует иметь в виду, что в α_{ij} первый индекс (i) соответствует штрихованному вектору базиса

Совокупность α_{ij}. составляет квадратную *матрицу преобразования* A от старого (нештрихованного) базиса к новому (штрихованному)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}. \qquad (1.3.3)$$

Первая строка этой матрицы дает разложение $\mathbf{e}'_1$ по $\mathbf{e}_j$, вторая – разложение $\mathbf{e}'_2$ по $\mathbf{e}_j$, третье – разложение $\mathbf{e}'_3$ по $\mathbf{e}_j$, что можно представить в виде в соответствии с правилом немого суммирования (1.2.1):

$$\mathbf{e}'_i = \alpha_{ij}\,\mathbf{e}_j. \qquad (1.3.4)$$

Кроме того, можно записать

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1 \cos\langle \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1\rangle + \mathbf{e}'_2\cos\langle \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_2\rangle + \mathbf{e}'_3 \cos\langle \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_3\rangle = \mathbf{e}'_i\alpha_{i1}.$$

Т.е. первый столбец матрицы A дает разложение $\mathbf{e}_1$ через $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$. Аналогично равенство можно записать и для $\mathbf{e}_2$, и $\mathbf{e}_3$. В итоге имеем

$$\mathbf{e}_j = \alpha_{ij}\,\mathbf{e}'_i. \qquad (1.3.5)$$

Таким образом первый, второй и третий столбцы матрицы A дают разложение векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ через $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$.

Свойства матрицы A:

1. Строки матрицы A дают разложение нового базиса по старому (1.3.4). Из-за ортонормированности нового и старого базисов

$$\mathbf{e}'_i\,\mathbf{e}'_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{e}_k\,\mathbf{e}_l = \delta_{kl}, \qquad (1.3.6)$$

и имеет место

$$\mathbf{e}'_i\,\mathbf{e}'_j = \delta_{ij} = \alpha_{ik}\,\mathbf{e}_k\,\alpha_{jl}\,\mathbf{e}_l = \alpha_{ik}\,\alpha_{jl}\,\mathbf{e}_k\,\mathbf{e}_l = \alpha_{ik}\,\alpha_{jl}\,\delta_{kl} = \alpha_{ik}\,\alpha_{jk}.$$

Т.е. строки матрицы A являются ортонормированными:

$$\alpha_{ik}\,\alpha_{jk} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{если} \quad i = j. \end{cases} \qquad (1.3.7)$$

2. Столбцы матрицы А дают разложение старого баланса по новому (1.3.5). Из-за ортонормированности (1.3.6) нового и старого базисов

$$\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \alpha_{ki}\ \mathbf{e}'_k\ \alpha_{lj}\ \mathbf{e}'_l = \alpha_{ki}\,\alpha_{lj}\ \mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_l = \alpha_{ki}\,\alpha_{lj}\,\delta_{kl} = \alpha_{ki}\,\alpha_{kj}.$$

Т.е. столбцы матрицы А являются ортонормированными:

$$\alpha_{ki}\,\alpha_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{если} \quad i = j. \end{cases} \qquad (1.3.8)$$

Определение: Матрицы, обладающие свойствами (1.3.2) и (1.3.3), называются *ортонормированными.*

Координаты точки в старой (нештрихованной) и новой (штрихованной) системах координат будем обозначать соответственно через x_1, x_2, x_3 и x'_1, x'_2, x'_3. Между их значениями имеет место следующая связь, которую проиллюстрируем на выражении для x'_1, через x_1, x_2 , x_3 и выражении для x_1 через x'_1, x'_2, x'_3:

$$x'_1 \ = \ x_1 \cos\langle \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 \rangle + x_2 \cos\langle \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_2 \rangle + x_3 \cos\langle \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_3 \rangle =$$

$$= x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{12} + x_3\alpha_{13} = \alpha_{ij}x_j;$$

$$x_1 = x'_1\cos\langle \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 \rangle + x'_2 \cos\langle \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_2 \rangle + x'_3 \cos\langle \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_3 \rangle =$$

$$= x'_1\alpha_{11} + x'_2\,\alpha_{21} + x'_3\alpha_{31} = x'_i\alpha_{i1}.$$

Аналогично можно выписать соотношение для x'_2 и x'_3 через x_1, x_2 , x_3 и для x_2 , x_3 через x'_1, x'_2, x'_3:

$$x'_2 = x_i\alpha_{2i}, \qquad x'_3 = x_i\alpha_{3i};$$

$$x_2 = x'_i\,\alpha_{i2}, \qquad x_3 = x'_i\alpha_{i3}.$$

Полученные соотношения можно представить в следующем виде

$$x'_j = \alpha_{ji}x_i, \qquad x_j = \alpha_{ij}\,x'_i. \qquad (1.3.8)$$

Уравнение (1.3.4) получается также из уравнения инвариантности для радиуса-вектора **r** точки, представленной в разных системах координат

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x'_1\,\mathbf{e}'_1 + x'_2\,\mathbf{e}'_2 + x'_3\,\mathbf{e}'_3, \quad \text{или} \quad x_j\mathbf{e}_j = x'_j\,\mathbf{e}'_j. \qquad (1.3.9)$$

Умножая последнее равенство на $\mathbf{e}_i$ или на $\mathbf{e}'_i$, получим два равенства

$$x_j\,\mathbf{e}_j\,\mathbf{e}_i = x'_k\,\mathbf{e}'_k\mathbf{e}_i, \quad x_j\mathbf{e}_j\,\mathbf{e}'_i = x'_k\,\mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i\,.$$

Учитывая, что

$$\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = \delta_{ij}\,, \quad \mathbf{e}'_k\mathbf{e}_i = \cos\left\langle \mathbf{e}'_k\mathbf{e}_i \right\rangle = \alpha_{ki},$$

$$\mathbf{e}_j\mathbf{e}'_i = \cos\left\langle \mathbf{e}'_i\mathbf{e}_j \right\rangle = \alpha_{ij}, \quad \mathbf{e}'_k\,\mathbf{e}'_i = \delta_{ik},$$

получим (1.2.4).

Введем матрицу $B = (\beta_{ij})$, транспонированную к матрице преобразования $A = (\alpha_{ij})$, т.е.

$$B = A^{(T)},\ \beta_{ij} = \alpha_{ji}.$$

Докажем, что матрица $B = A^{(T)}$ – ортонормированная, т.е. удовлетворяет (1.3.8) . Действительно

$$\beta_{ij}\beta_{ik} = \alpha_{ji}\alpha_{ki} = \delta_{ik}\,, \quad \beta_{ij}\beta_{kj} = \alpha_{ji}\alpha_{jk} = \delta_{ik}\,,$$

Покажем, что матрица $B = A^{(T)}$ является обратной к A, т.е. $B = A^{-1}$:

$$(BA)_{ik} = \beta_{ij}\alpha_{jk} = \alpha_{ji}\alpha_{jk} = \delta_{ik}\,, \text{ т.е. } BA = A^{(T)}A = E.$$

Таким образом, имеем теорему.

Теорема. Всякая ортонормированная матрица A имеет обратную матрицу $B = A^{-1}$, которая совпадает с транспонированной. Определитель ортонормированной матрицы равен 1:

$$A^{-1} = A^{(T)}, \quad |A| = |A^{(T)}| = 1. \tag{1.3.10}$$

Введем матрицы-строки X и X′ (размер 1 × 3) и матрицы-столбцы Э и Э′ (размер 3 × 1)

$$X = (x_1, x_2, x_3), \quad X' = (x'_1,\ x'_2,\ x'_3), \quad Э = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad Э' = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix}. \tag{1.3.11}$$

Говорят, что строки представляют контрвариантные компоненты, а столбцы – ковариантные базисы. Тогда в соответствии с (1.2.6), (1.2.7) получим следующие матричные формулы преобразования координат точки X, базиса Э и вектора $\mathbf{x}$, соответствующего рассматриваемой точке

$$X' = X\,A^{-1}, \quad Э' = AЭ, \quad \mathbf{x} = XЭ = X'Э' = X\,A^{-1}AЭ. \tag{1.3.12}$$

Таким образом, преобразование (1.3.8) контрвариантных компонент вектора представленных в виде матрицы-строки Х, и преобразование (1.3.4) ковариантного базиса, представленного в виде матрицы-столбца Э, являются взаимно-обратными. При этом

$$\text{X} = \text{X}'\text{A} = \text{X}'\text{B}^{-1}, \quad \text{Э} = \text{A}^{-1}\text{Э} = \text{BЭ}'. \tag{1.3.13}$$

Приведем формулы для преобразования проекций и векторов базиса, соответствующие (1.3.4), (1.3.5), (1.3,8):

$$x'_j = \alpha_{ji}x_i, \quad x_i = \beta_{ij}x'_j = \alpha_{ki}x'_k;$$

$$\mathbf{e}'_j = \alpha_{jk}\,\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{e}_j = \beta_{jk}\alpha_{ki}\mathbf{e}_k = \alpha_{kj}\mathbf{e}'_k. \tag{1.3.14}$$

“**Правило штрихованного индекса**”. Для компонент α_{ij} формулах преобразования x'_i, $\mathbf{e}'_i$ через x_j, $\mathbf{e}_j$, и в формулах преобразования x_j, $\mathbf{e}_j$ через x'_i, $\mathbf{e}'_i$ первый индекс согласуется с номером штрихованной величины.

Задачи

1. Пусть дана система координат x_1, x_2, x_3 . Выберем систему координат x'_1, x'_2, x'_3 следующим образом: ось x'_3 по x_3, а оси x'_1 и x'_2 получаются из x_1 и x_2 поворотом их

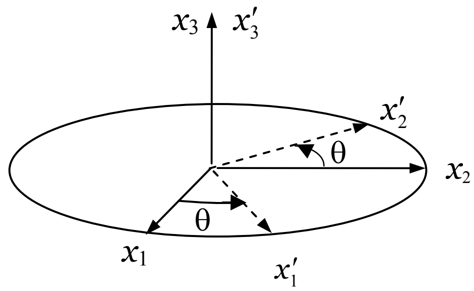


Рис.1.3.1

относительно оси x_3 на угол θ.

Матрица преобразования будет следующая:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Получить матрицу преобразования в задаче 1 для случая бесконечно малого вращения на угол $d\theta$.

§ 4. Скаляр и вектор

В теории поля широко для различных физических величин используются скаляры и вектора.

Определение 1. Скаляр(scalar) – математический объект, который:

1) характеризуется одним числом r;

2) это число одинаково во всех системах координат, т.е. инвариантно при преобразованиях координат:

$$r' = r. \tag{1.4.1}$$

Примеры скаляров: масса, время, энергия, температура, длина и т.д.

***Определение* 2.** Вектор (vector) – математический объект $\mathbf{r}$, который:

1) характеризуется тремя числами r_1, r_2, r_3;

2) при преобразовании координат эти числа – компоненты вектора – меняются по закону (1.3.8):

$$r'_j = \alpha_{ji} r_i \,. \tag{1.4.2}$$

В книге вектора обозначаются жирными буквами: $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{e}$ и т.д. В рукописных текстах для обозначения векторов можно использовать и буквы со стрелками на верху: $\vec{\mathbf{r}}$, $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{e}}$ и т.д. Примеры векторов: скорость, смешение, сила, ускорение и т.д. Вектор является инвариантным объектом:

$$\mathbf{r} = r_i \mathbf{e}_i = r_i \alpha_{ji} \mathbf{e}'_j = r'_j \, \mathbf{e}'_j = \mathbf{r}.$$

Введем длину (модуль) вектора через его компоненты

$$\mathbf{r} \Rightarrow |\mathbf{r}| \equiv r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \equiv \left(r_i r_i\right)^{1/2} \,.$$

Нетрудно доказать, что длина вектора инвариантна во всех системах координат:

$$r'_i \, r'_i = r_j \alpha_{ij} \, r_k \alpha_{ik} = r_j r_k \, \alpha_{ij} \alpha_{ik} = r_j r_k \, \delta_{jk} = r_j r_j = r_i r_i \,.$$

Проекция вектора $\mathbf{r}$ на направление, заданное вектором $\boldsymbol{\mu}$ (см. (1.2.3)), является скаляром:

$$\mathrm{pr}_{\mu} \mathbf{r} = r_{\mu} = (\mathbf{r}\boldsymbol{\mu})/\mu = r_i \, \mu_i / \mu. \tag{1.4.3}$$

Задача

Доказать, что выражение скалярного произведения через координаты векторов инвариантно, т.е. это выражение определяет скаляр:

$$r'_i \, u'_i = r_k \alpha_{ik} u_j \alpha_{ij} = r_k u_j \alpha_{ik} \alpha_{ij} = r_k u_j \delta_{kj} = r_k r_k = r_i u_i \,.$$